解答例

STEP I 2009、第 3 問

純粋数学 • 実数解の個数

> **STEP I 2009、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q3

鍵となる考え方

両辺を適切に累乗して根号を外すが、そのとき失われるものを見落とさないようにする。平方根（square root）は決して負にならないので、2 乗する操作が可逆になるのは $x \geq 0$ という条件もあわせて課したときに限る。一方、実数の 3 乗根（cube root）にはそのような制約はない。すべての実数はちょうど 1 つの実数の 3 乗根をもつからである。そのあとは、どの個数の問題も二次方程式（quadratic equation）の解に帰着し、それらの解の符号は和と積から読み取ることができる。

解答

小問 (i)：平方根の方程式

ここで $(a-x)^{\frac{1}{2}}$ は非負（non-negative）の平方根を表すので、どの解も $x \geq 0$ を満たし、2 乗すると $x^2 = a - x$、すなわち $x^2 + x - a = 0$ を得る。逆に、$x \geq 0$ かつ $x^2 + x - a = 0$ ならば、$a - x = x^2 \geq 0$ であり、$(a-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2} = |x| = x$ となる。よって

$$x = (a-x)^{\frac{1}{2}} \iff x^2 + x - a = 0 \text{ かつ } x \geq 0,$$

であり、二次方程式 $x^2 + x - a = 0$ の**非負の**解の個数を数えればよい。その解を（実数のとき）α, β とすると、

$$\alpha + \beta = -1, \qquad \alpha\beta = -a.$$

$a > 0$ の場合。判別式（discriminant）$1 + 4a$ は正なので、実数解は 2 つあり、その積 $-a$ は負である。よって一方の解は正、他方は負であり、解はちょうど 1 つである。

$a = 0$ の場合。二次方程式は $x(x+1) = 0$ となり、解は 0 と -1 である。非負なのは

$x = 0$ だけなので、解はちょうど1つである。

$a < 0$ の場合。 $a < -\frac{1}{4}$ ならば判別式は負で、実数解はまったくない。$-\frac{1}{4} \leq a < 0$ ならば解は実数で、その積 $-a$ は正なので同符号であり、その和は -1 なので両方とも負である。いずれにせよ非負の解はないので、解は存在しない。

したがって、方程式は $a \geq 0$ のとき実数解を1つもち、$a < 0$ のとき実数解をもたない。これが示すべきことであった。

小問 (i)：3乗根の方程式

すべての実数 t はちょうど1つの実数の3乗根をもち、符号の条件なしに $x = t^{\frac{1}{3}} \iff x^3 = t$ が成り立つ。よって方程式は

$$x^3 - (1+a)x + a = 0.$$

と同値である。係数の和は $1 - (1+a) + a = 0$ なので、$x = 1$ は常に解であり、因数を割り出すと

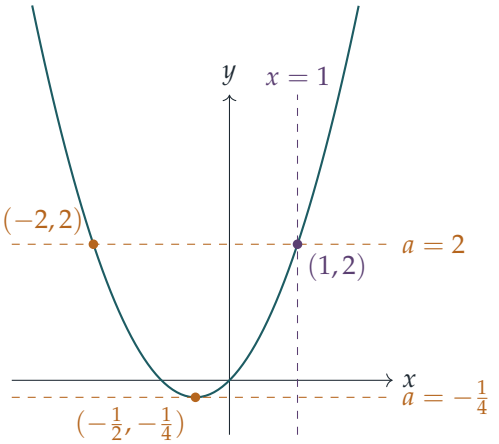
$$x^3 - (1+a)x + a = (x-1)(x^2 + x - a).$$

同じ二次式が現れた。解は $x = 1$ と、$x^2 + x - a = 0$ の実数解（今度は符号の制約なし）を合わせたものである。

> **考えてみよう** 二次方程式の解が $x = 1$ と一致したり、2つの解どうしが一致したりすることはあるだろうか。

どちらも起こり、それこそが個数を減らす場合である。二次方程式が重解（repeated root）をもつのは $1 + 4a = 0$、すなわち $a = -\frac{1}{4}$ のときで、その解は $-\frac{1}{2}$ である。また、$x = 1$ が二次方程式の解になるのは $1 + 1 - a = 0$、すなわち $a = 2$ のときであり、このとき $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ なので、解は 1 と -2 である。

二次方程式を $a = x^2 + x$ と書くと、その実数解は、高さ a の水平な直線と放物線（parabola）$y = x^2 + x$ の交点に対応する。この放物線の最下点は $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ である。追加の解 $x = 1$ は放物線上の点 $(1, 2)$ に対応する。



場合をまとめると、相異なる実数解の個数は次のとおりである。

- $a < -\frac{1}{4}$：二次方程式は実数解をもたないので、解は $x = 1$ の **1 個**；
- $a = -\frac{1}{4}$：解は 1 と $-\frac{1}{2}$ なので **2 個**；
- $-\frac{1}{4} < a < 2$ または $a > 2$：二次方程式の相異なる 2 解はどちらも 1 に等しくなく、これに $x = 1$ を加えて **3 個**；
- $a = 2$：解は 1 と -2 なので **2 個**。

小問 (ii)

小問 (i) とまったく同様に、平方根は非負なので

$$x = (b + x)^{\frac{1}{2}} \iff x^2 - x - b = 0 \text{ かつ } x \geq 0,$$

である（逆が成り立つのは、$x \geq 0$ かつ $b + x = x^2$ ならば $(b + x)^{\frac{1}{2}} = |x| = x$ となるからである）。ここで $x^2 - x - b = 0$ の解の和は 1、積は $-b$ であり、判別式は $1 + 4b$ である。

$b < -\frac{1}{4}$ の場合。実数解はないので、解は**存在しない**。

$b = -\frac{1}{4}$ の場合。二次方程式は $(x - \frac{1}{2})^2 = 0$ となり、$x = \frac{1}{2} \geq 0$ なので、解は **1 個**である。

$-\frac{1}{4} < b < 0$ の場合。相異なる 2 つの実数解をもち、その積 $-b$ は正なので同符号であり、和 1 は正なので両方とも正である。解は **2 個**である。

$b = 0$ の場合。二次方程式は $x(x - 1) = 0$ となり、0 と 1 はどちらも非負なので、解は **2 個**である。（実際、$0 = \sqrt{0}$ かつ $1 = \sqrt{1}$ である。）

$b > 0$ **の場合。**2つの実数解の積は負なので、一方は正、他方は負である。解は**1個**である。

まとめると、$b < -\frac{1}{4}$ のとき解はなく、$b = -\frac{1}{4}$ のとき1個、$-\frac{1}{4} < b \leq 0$ のとき2個、$b > 0$ のとき1個である。

検算

- グラフで考えると、小問 (ii) は直線 $y = x$ と、点 $(-b, 0)$ から始まる半放物線 $y = \sqrt{b + x}$ との交点を問うている。$b = -\frac{1}{5}$ のとき解は $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{5}}$、すなわち約 0.276 と 0.724 であり、どちらも小数点以下何桁にもわたって $x = \sqrt{x - 0.2}$ を満たす。
- $a = 2$ のときの3乗根の方程式では、$x = 1$ と $x = -2$ のどちらも解になる：$(3 \cdot (-2) - 2)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$。
- 各境界値（$-\frac{1}{4}$、0、2）の両側にわたる a と b の値の範囲について、細かい格子上でコンピュータにそれぞれの方程式の解を数えさせたところ、その個数は上の場合分けと一致した。

よくある間違い

- 2乗したあとで $x \geq 0$ を忘れること。そうすると小問 (i) で $a > -\frac{1}{4}$ のすべての a に対して解が2個となってしまうが、これは誤りである。
- 3乗根の方程式にまで $x \geq 0$ を課してしまうこと。負の数の3乗根も立派な実数である。
- $a = 2$ の場合を見落とすこと。このとき一次因数（linear factor）の解 $x = 1$ が二次方程式の解にもなるので、3つの解のうち2つが重なる。

STEP のその先へ

要点は、$\mathbb{R}$ 上で2乗は可逆な操作ではないが、3乗は可逆だということである。$x \mapsto x^3$ は $\mathbb{R}$ の全単射（bijection）であるが、$x \mapsto x^2$ はそうではない。そのため、「その」平方根は非負の分枝（branch）を選んではじめて定義される。$x = f(x)$ のような方程式を不動点（fixed point）の問題とみなし、パラメータを動かしながらその個数を数えることは、分岐理論（bifurcation theory）の出発点である。分岐理論では、解が対になって生まれたり（$a = -\frac{1}{4}$ のように）、入れ替わったり（$a = 2$ のように）する。関数、逆関数（inverse function）、連続性（continuity）についての丁寧な解説としては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。