解答例

STEP I 2009、第 2 問

純粋数学 • 3 次曲線の接線

> **STEP I 2009、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q2

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.9 節「**三次曲線の接線**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/tangents-cubic.html

鍵となる考え方

接線（tangent）は接点（point of contact）において曲線と 2 回交わる。すなわち、接線の式を曲線の方程式に代入すると、接点は重根（repeated root）を与える。三次方程式（cubic equation）の重根が一つわかれば、残りの根は因数分解（factorisation）によってただちに求まり、その 3 番目の交点は有理数（rational number）の座標をもつことがわかる。そのうえで分母を払うと、曲線の方程式は立方数の和（sum of cubes）に書き換えられる。

解答

$(-a, b)$ における接線

まず、$x^3 + a^3 + b^3 = -a^3 + a^3 + b^3 = b^3 = y^3$ であるから、$(-a, b)$ は確かに曲線上にある。

$y^3 = x^3 + a^3 + b^3$ の両辺を x について陰関数微分（implicit differentiation）すると（a と b は定数である）、$y \neq 0$ であるところでは

$$3y^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2}{y^2}$$

となる。$b > 0$ である点 $(-a, b)$ において、傾き（gradient）は a^2/b^2 である。したがっ

て接線は

$$\begin{aligned} y - b &= \frac{a^2}{b^2}(x + a) \\ b^2y - b^3 &= a^2x + a^3 \\ b^2y - a^2x &= a^3 + b^3, \end{aligned}$$

となり、求める式が得られた。

$a = 1, b = 2$ のときの交点

このとき曲線は $y^3 = x^3 + 9$ であり、$(-1, 2)$ における接線は $4y - x = 9$、すなわち $y = \frac{1}{4}(x + 9)$ である。これを曲線の方程式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{(x+9)^3}{64} &= x^3 + 9 \\ x^3 + 27x^2 + 243x + 729 &= 64x^3 + 576 \\ 0 &= 63x^3 - 27x^2 - 243x - 153. \end{aligned}$$

すべての係数は 9 で割り切れるので、両辺を 9 で割って

$$7x^3 - 3x^2 - 27x - 17 = 0,$$

を得る。これが問われている三次方程式である。

p, q, r, s を求める

考えてみよう この三次方程式の根の一つはすでにわかっている。それがなぜ**二重根**（double root）になるはずなのだろうか。

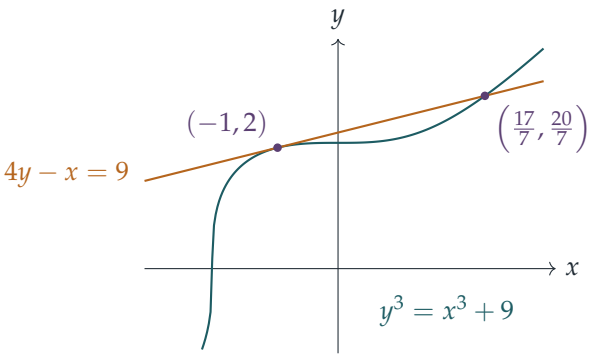
直線は $x = -1$ で曲線に接しているので、$x = -1$ は重根である。接点の近くでは直線と曲線は 1 次の近似まで一致するので、両者の差はそこで 2 次の位数で 0 になるからである。よって $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ は因数である。x^3 の係数と定数項を比較すると、もう一方の因数は $7x - 17$ でなければならず、実際に確かめることができる：

$$(x + 1)^2(7x - 17) = 7x^3 + 14x^2 + 7x - 17x^2 - 34x - 17 = 7x^3 - 3x^2 - 27x - 17.$$

したがって、接線は $x = \frac{17}{7}$ で再び曲線と交わり、そこでは

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{17}{7} + 9\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{80}{7} = \frac{20}{7}.$$

である。



この点は $y^3 = x^3 + 9$ 上にあるので

$$\left(\frac{20}{7}\right)^3 = \left(\frac{17}{7}\right)^3 + 9.$$

が成り立つ。両辺に 7^3 を掛けると $20^3 = 17^3 + 9 \cdot 7^3$ となる。最後の項は立方数ではないが、$9 = 1 + 8 = 1^3 + 2^3$ であるから

$$9 \cdot 7^3 = 7^3 + 2^3 \cdot 7^3 = 7^3 + 14^3.$$

となる。（ここで、$a = 1, b = 2$ とした元の形 $a^3 + b^3$ が再び現れている。）したがって

$$20^3 = 17^3 + 14^3 + 7^3,$$

であり、$p = 20, q = 17, r = 14, s = 7$ とすればよい（後ろの 3 つの順序は任意である）。

検算

直接計算すると $17^3 + 14^3 + 7^3 = 4913 + 2744 + 343 = 8000 = 20^3$ である。また、三次方程式の 3 つの根は $-1, -1, \frac{17}{7}$ であり、その和は $\frac{3}{7}$、積は $\frac{17}{7}$ である。これは係数から読み取れる 3/7 および 17/7 と一致する。さらに、$y = \sqrt[3]{x^3 + a^3 + b^3}$ の $x = -a$ における数値微分の値は a^2/b^2 と一致する。

よくある間違い

- 重根を利用しないこと：$(x+1)^2$ で割る代わりに、三次方程式を一から解こうとしてしまう。
- $20^3 = 17^3 + 3087$ で止まってしまうこと。求めているのは立方数の和となる正の整数であり、$3087 = 9 \cdot 7^3$ を $7^3 + 14^3$ に分ける必要がある。

STEP のその先へ

これは 3 次曲線に対する古典的な**接線法**（tangent method）である。直線は 3 次曲線と重複度（multiplicity）を込めて 3 点で交わるので、2 つの有理点（rational point）（あるいは、ここでのように 2 重に数えた 1 点）から 3 番目の有理点が得られる。楕円曲線（elliptic curve）上では、この弦と接線による構成（chord-and-tangent construction）は群法則（group law）となり、現代の数論（number theory）の大きな分野の出発点となっている。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）はこの種のディオファントス方程式（Diophantine equation）を論じており、シルヴァーマン（Silverman）とテイト（Tate）の *Rational Points on Elliptic Curves*（『楕円曲線上の有理点』）はその幾何学を本格的に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。