解答例

STEP I 2009、第 13 問

確率・統計 ・ 並べ方と連

> **STEP I 2009、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q13

鍵となる考え方

重要なのは女子の位置だけであり、どの女子・どの男子がどこにいるかは関係ない。そこで $(n+3)!$ 通りの並び方を扱う代わりに、女子が占める 3 つの場所の集合を選ぶことにする。$\binom{n+3}{3}$ 個の集合はどれも等しい確率で現れる。有利な集合を数えるには、まず n 人の男子を一列に並べ、男子の間と両端にある隙間のうちどこに女子が入るかを考えるのがもっとも簡単である。

解答

$(n+3)!$ 通りの並び方はすべて同様に確からしく、女子の位置の 3 つ組の集合はどれも同じ個数 $3!\,n!$ 通りの並び方から生じるので、女子の位置の集合は

$$\binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$$

個の可能な集合の上に一様分布（uniformly distributed）する。以下を通じて、K がとりうる値は 1、2、3 のみである。

一列に並んだ n 人の男子は $n+1$ 個の隙間をつくる（先頭の男子の前に 1 つ、最後の男子の後ろに 1 つ、隣り合う男子の間に $n-1$ 個）：



女子を隙間に入れる（1 つの隙間に何人入れてもよい）と一つの列が得られ、どの列もちょうど 1 通りの方法で得られる。同じ隙間に入った女子どうしは隣り合い、異な

る隙間に入った女子どうしの間には少なくとも 1 人の男子がいる。

小問 (i)

$K = 3$ とは、3 人の女子全員が一つのブロックをなすこと、すなわち全員が同じ隙間に入ることである。隙間の選び方は $n+1$ 通りなので、

$$\mathrm{P}(K=3) = \frac{n+1}{\binom{n+3}{3}} = \frac{6(n+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{6}{(n+2)(n+3)}.$$

（同じことだが、連続する 3 つの場所からなるブロックは、位置 $1, 2, \ldots, n+1$ のいずれからでも始めることができる。）

小問 (ii)

$K = 1$ とは、どの 2 人の女子も隣り合わないこと、すなわち女子が 3 つの**異なる**隙間に入ることである。$n+1$ 個の隙間から 3 個を $\binom{n+1}{3}$ 通りの方法で選び、それぞれに女子を 1 人ずつ入れる。したがって

$$\mathrm{P}(K=1) = \frac{\binom{n+1}{3}}{\binom{n+3}{3}} = \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} = \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)},$$

となり、示すべき式が得られた。（$n = 0$ または 1 のときは隙間が足りないが、この式は正しく 0 を与える。）

考えてみよう 数え上げの結果が $\binom{n+1}{3} \times 3!$ ではなく $\binom{n+1}{3}$ となるのはなぜか。

ここで数えているのは**位置**の集合であって、名前のついた子どもたちの並び方ではない。どの 3 つの隙間を使うかを選べば、女子の位置は完全に決まる。どの女子がどこに座るかは、位置の集合がどれも同様に確からしいという主張の中ですでに考慮されている。

小問 (iii)

まず $\mathrm{P}(K=2)$ が必要である。$K \in \{1,2,3\}$ であるから、

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(K=2) &= 1 - \frac{6}{(n+2)(n+3)} - \frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{(n^2+5n+6) - 6 - (n^2-n)}{(n+2)(n+3)} = \frac{6n}{(n+2)(n+3)}.\end{aligned}$$

検算として直接数えてみる。$K = 2$ とは、2 人の女子が一つの隙間に入り、3 人目の女子が別の隙間に入ることである。2 人組の隙間を選び、次に 1 人の女子のための別の隙間を選ぶと $(n+1)n$ 個の集合が得られ、$(n+1)n \big/ \binom{n+3}{3} = 6n/((n+2)(n+3))$ となって先ほどと一致する。

よって期待値（expectation）は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(K) &= 1\cdot\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)} + 2\cdot\frac{6n}{(n+2)(n+3)} + 3\cdot\frac{6}{(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n^2+11n+18}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+2)(n+9)}{(n+2)(n+3)}\\ &= \frac{n+9}{n+3}.\end{aligned}$$

検算

- $n=0$：女子しかいないので確実に $K=3$ であり、$\frac{n+9}{n+3}=3$ である。
- $n=1$：列は GGGB、GGBG、GBGG、BGGG の 4 通りで同様に確からしいので、$K=3$ と 2 がそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で起こり、$\mathrm{E}(K)=\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$ である。
- $n\to\infty$ のとき $\mathrm{E}(K)\to 1$ である：男子が多ければ、女子どうしが隣り合うことはほとんどない。
- $n=0,\ldots,9$ について位置の集合をすべて正確な分数で列挙し（たとえば $n=3$ では $\mathrm{P}(K=1,2,3)=\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}$、$\mathrm{E}(K)=2$ となる）、$n\le 4$ についてはラベルのついた子どもたちの $(n+3)!$ 通りの並び方をすべて列挙した。結果はすべて一致した。

よくある間違い

- 一つの分数の中で、順序つきの並べ方の個数と位置の集合の個数を混ぜてしまう。標本空間（sample space）を一つ選び、それを使い通すこと。
- 両端の 2 つの隙間を忘れ、$n+1$ 個ではなく $n-1$ 個の隙間を使ってしまう。

STEP のその先へ

「男子が隙間をつくり、女子が隙間に入る」という技法は仕切り法（stars and bars）の考え方であり、ランダムな配列における最長の連（run）という一般的な問題は古典的なものである。長いランダムな列では、最長の連は長さの対数程度の速さで増大する。大学の確率論の講義では、これらを指示変数（indicator variables）や母関数（generating functions）を通して学ぶ。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、このような数え上げの議論が展開される様子を見るのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。