解答例

STEP I 2009、第 12 問

確率・統計 ・ 確率と不等式

> **STEP I 2009、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q12

鍵となる考え方

ここでの確率（probability）はどれも、袋の中の個数の積の和を総数の累乗で割ったものである。したがって、どの比較も a, b, c についての 2 つの多項式（polynomial）を比べることに帰着する。冒頭の不等式（inequality）$x^2 + y^2 \geq 2xy$ は、まさにそのための道具である。小問 (ii) では、「ちょうど 2 つが同じ」場合を正面から数えるのは面倒である。残りの 2 つの場合（すべて同じ、すべて異なる）を数えて 1 から引くほうが、はるかに簡単である。

解答

不等式

任意の実数 x, y に対して

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0,$$

が成り立つ。実数の 2 乗は決して負にならないからである。よって $x^2 + y^2 \geq 2xy$ であり、等号は $x = y$ のときに限り成り立つ。

小問 (i)

各袋には $a + b$ 個の菓子が入っており、2 回の取り出しは異なる袋から行うので独立（independent）である。2 個の菓子が同じ色であるという事象（event）を S、異なる

色であるという事象を D とする。このとき

$$\mathrm{P}(S) = \mathrm{P}(\text{赤}, \text{赤}) + \mathrm{P}(\text{青}, \text{青}) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{2ab}{(a+b)^2},$$
$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(\text{赤}, \text{青}) + \mathrm{P}(\text{青}, \text{赤}) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}.$$

である。分母は等しく正であり、上の不等式より $2ab \leq a^2 + b^2$ である。よって、示すべき通り $\mathrm{P}(S) \leq \mathrm{P}(D)$ が成り立ち、等号は $a = b$ のときに限り成り立つ。

小問 (ii)

各袋の菓子の個数を $n = a + b + c$ とおく。袋の中身は次の通りである。

	赤	白	黄
袋 1	a	b	c
袋 2	b	c	a
袋 3	c	a	b

3 回の取り出しは独立なので、各袋から（順に）特定の色を取り出す確率は、3 つの個数の積を n^3 で割ったものである。3 個の菓子がすべて同じ色であるという事象を A、ちょうど 2 個が同じ色であるという事象を T、3 個すべてが異なる色であるという事象を E とする。これら 3 つの事象はあらゆる場合を尽くしており、互いに重なり合わない。

すべて同じ場合。 表の各列を縦に読むと、

$$\mathrm{P}(A) = \frac{abc + bca + cab}{n^3} = \frac{3abc}{n^3}.$$

すべて異なる場合。 袋 1, 2, 3 から出る色は、赤・白・黄の $3! = 6$ 通りの並べ方のいずれかである。

$$\text{RWY: } a \cdot c \cdot b \quad \text{RYW: } a \cdot a \cdot a \quad \text{WRY: } b \cdot b \cdot b$$
$$\text{WYR: } b \cdot a \cdot c \quad \text{YRW: } c \cdot b \cdot a \quad \text{YWR: } c \cdot c \cdot c$$

したがって

$$\mathrm{P}(E) = \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{n^3}.$$

考えてみよう 残りの 18 通りの結果を列挙せずに、これら 2 つの答えからどうやって $\mathrm{P}(T)$ を求めればよいだろうか？

$\mathrm{P}(T) = 1 - \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(E)$ なので、$n^3 = (a+b+c)^3$ の展開（expansion）が必要である。展開には 3 つの 3 乗の項、係数（coefficient）3 をもつ a^2b のような 6 つの項、そして係数 6 をもつ abc が現れる。

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3\left(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2\right) + 6abc.$$

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T) &= \frac{n^3 - 3abc - (a^3 + b^3 + c^3 + 3abc)}{n^3} \\ &= \frac{3\left(a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2\right)}{(a+b+c)^3},\end{aligned}$$

となり、与えられた結果が得られる。菓子がすべて同じ色である確率は

$$\mathrm{P}(A) = \frac{3abc}{(a+b+c)^3}.$$

である。

結論の導出。 6 つの項を、共通因数をもつ 2 つずつの組にまとめる。

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 = a\left(b^2 + c^2\right) + b\left(c^2 + a^2\right) + c\left(a^2 + b^2\right).$$

冒頭の不等式より $b^2 + c^2 \geq 2bc$ であり、$a > 0$ なので両辺に掛けても不等号の向きは変わらない。すなわち $a(b^2 + c^2) \geq 2abc$ である。同様に $b(c^2 + a^2) \geq 2abc$、$c(a^2 + b^2) \geq 2abc$ である。これらを足し合わせると

$$a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 6abc.$$

両辺に $3/n^3 > 0$ を掛けると

$$\mathrm{P}(T) \geq \frac{18abc}{n^3} = 6 \cdot \frac{3abc}{n^3} = 6\,\mathrm{P}(A),$$

となり、示すべき結果が得られる。等号が成り立つには $b = c$、$c = a$、$a = b$ がすべて同時に必要なので、等号は $a = b = c$ のときに限り成り立つ。

検算

- $a = b = c$ のとき、どの袋も各色が 3 分の 1 ずつなので、$\mathrm{P}(A) = 3 \cdot \frac{1}{27} = \frac{1}{9}$、$\mathrm{P}(E) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ となり、残りは $\mathrm{P}(T) = \frac{2}{3} = 6 \cdot \frac{1}{9}$ である。これは等号が成り立つ場合である。
- $a, b, c = 1, 2, 3$ $(n = 6)$ のとき：$\mathrm{P}(A) = \frac{18}{216} = \frac{1}{12}$、$\mathrm{P}(E) = \frac{54}{216} = \frac{1}{4}$、$\mathrm{P}(T) = \frac{144}{216} = \frac{2}{3}$ である。これらの和は 1 であり、$\frac{2}{3}$ は $\frac{1}{12}$ の 8 倍である。

- 3 つの公式はすべて、1 から 8 までのすべての a, b, c について厳密な数え上げで確かめ、さらにシミュレーションでも確かめた（$a, b, c = 2, 3, 5$ のとき、200 000 回の試行で $\mathrm{P}(T)$ は 0.659 となり、厳密な値 0.66 と比べられた）。

よくある間違い

- 袋の中身を誤った順序で書く。袋 2 に入っているのは a 個の**黄**であり、a 個の赤ではない。上のような表を作れば、この誤りを防げる。
- $\mathrm{P}(E)$ のどの並べ方も abc を与えると思い込む。そうなるのは 3 つだけであり、並べ方 RYW、WRY、YWR はそれぞれ a^3、b^3、c^3 を与える。
- 不等式に a、b、c を掛けるときに、$a, b, c > 0$ であることを述べ忘れる。

STEP のその先へ

最後の不等式は、ミュアヘッドの不等式（Muirhead's inequality）の一例である。これは単項式（monomial）の対称和を比較するための一般的な法則であり、ここでは項 a^2b の和が項 abc の和を上回ることを述べている。小問 (i) は同じ考え方の 2 変数の場合であり、どちらも相加・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）に基づいている。数え上げの議論と余事象（complementary event）についてさらに学びたければ、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。