解答例

STEP I 2009、第 11 問

力学 ・ 衝突と反発係数

> **STEP I 2009、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q11

鍵となる考え方

一次元の衝突はすべて、運動量保存則（conservation of momentum）とニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）という二つの式で決まる。エネルギーを扱うときのこつは、各粒子の損失を二乗の差として $\frac{1}{2}m(u-p)(u+p)$ の形に書くことである。運動量保存則によって因数 $u-p$ と $q-v$ が結びつくからである。共通因数 $u-p$ をくくり出してしまえば、残った括弧の中身はまさに反発の法則が記述しているものになる。

解答

粒子はなめらかな台の上で一直線上を運動するものとし、速度は $\mathbf{i}$ の向きを正として測る。$u > v$ であるから、質量 m の粒子が後ろから追いつく。水平方向の外力ははたらかないので、運動量は保存される：

$$mu + Mv = mp + Mq, \qquad \text{よって} \qquad M(q-v) = m(u-p). \tag{1}$$

ニュートンの反発の法則によれば、遠ざかる速さは近づく速さの e 倍である：

$$q - p = e(u-v). \tag{2}$$



衝突前（速度は $\mathbf{i}$ 方向）、$u > v$

小問 (i)

運動エネルギー（kinetic energy）の損失は

$$\Delta = \tfrac{1}{2}m(u^2 - p^2) + \tfrac{1}{2}M(v^2 - q^2) = \tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) - \tfrac{1}{2}M(q-v)(q+v).$$

である。(1) により $M(q-v)$ を $m(u-p)$ で置き換えられるので、因数 $\tfrac{1}{2}m(u-p)$ がくくり出せる：

$$\begin{aligned}\Delta &= \tfrac{1}{2}m(u-p)[(u+p)-(q+v)] \\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)[(u-v)-(q-p)] \\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)[(u-v)-e(u-v)] \qquad (2)\text{ より} \\ &= \tfrac{1}{2}m(u-p)(u-v)(1-e),\end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られた。

考えてみよう エネルギー損失の式から、どうして p について何かがわかるのだろうか。

衝突によって運動エネルギーが生まれることはないので、$\Delta \geq 0$ である。積 $\tfrac{1}{2}m(u-p)(u-v)(1-e)$ において、$m > 0$、$u - v > 0$（仮定）、$1 - e > 0$（$e < 1$ より）である。したがって Δ の符号は $u - p$ の符号に一致し、$\Delta \geq 0$ から $u \geq p$ が従う。質量 m の粒子は **i** の向きに速くなることはできない。M から受ける力積（impulse）は後ろ向きにはたらくのだから、これは納得のいく結果である。

$\Delta \geq 0$ を物理的事実として用いたくなければ、(1) と (2) を直接解けばよい：

$$p = \frac{mu + Mv - Me(u-v)}{m+M}, \qquad \text{よって} \qquad u - p = \frac{M(1+e)(u-v)}{m+M} > 0$$

が $e \geq 0$ に対して成り立つ。これで $u \geq p$ が確かめられ、したがって $\Delta \geq 0$ である。

小問 (ii)

各粒子は o でない同じ量のエネルギーを失うので、

$$\tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) = \tfrac{1}{2}M(v-q)(v+q) \neq 0.$$

である。(1) より $M(v-q) = -m(u-p)$ であるから、右辺は $-\tfrac{1}{2}m(u-p)(v+q)$ となり、

$$\tfrac{1}{2}m(u-p)(u+p) = -\tfrac{1}{2}m(u-p)(v+q).$$

を得る。左辺は o でないので $m(u-p) \neq 0$ であり、両辺を $\tfrac{1}{2}m(u-p)$ で割ることができる：

$$u + p = -(v+q), \qquad \text{すなわち} \qquad u + v + p + q = 0. \tag{3}$$

さて、(2) と (3) から p と q の和と差が得られる：

$$p+q=-(u+v), \qquad q-p=e(u-v),$$

したがって

$$p=-\tfrac{1}{2}[(u+v)+e(u-v)], \qquad q=-\tfrac{1}{2}[(u+v)-e(u-v)].$$

である。運動量保存則はまだ完全な形では使っておらず、e を決めるのはこの式である。$mp+Mq=mu+Mv$ に代入して両辺を 2 倍すると：

$$\begin{aligned}-(m+M)(u+v)+(M-m)e(u-v)&=2mu+2Mv,\\ (M-m)e(u-v)&=(m+M)(u+v)+2mu+2Mv\\ &=(M+3m)u+(3M+m)v.\end{aligned}$$

$u-v>0$ であり、また $m\neq M$ のとき $M-m\neq 0$ であるから、割り算をして

$$e=\frac{(M+3m)u+(3M+m)v}{(M-m)(u-v)},$$

を得る。これが示すべき式である。

検算

- $m=1$、$M=3$、$u=1$、$v=-\frac{1}{2}$ とする。公式から $e=\frac{6-5}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$ となる。このとき $p=-\frac{1}{2}$、$q=0$ であり、運動量も $1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}+0$ と確かに一致する。各粒子が失うエネルギーは $\frac{3}{8}$ であり、$u+v+p+q=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0=0$ である。
- $e=1$ のとき、(i) の式は損失 0 を与える。完全弾性衝突（perfectly elastic collision）ではそうなるべきである。
- コンピュータで、(i) を 2000 通りのランダムな衝突について厳密な分数計算で検証し、(ii) を $0\le e<1$ を満たす 455 通りのランダムな場合について検証した。

よくある間違い

- 反発の法則を逆にしてしまうこと。正しくは $q-p=e(u-v)$、つまり「遠ざかる速さ」を「近づく速さ」で割ったものであり、ここではどちらも正の量として測っている。
- $u-p$ が 0 でない理由を述べずに $u-p$ で割ること。ここで「0 でない量」という条件があるのは、まさにそのためである。

STEP のその先へ

(i) の因数分解は、重心系（centre-of-mass frame）で考えることから自然に導かれる見事な帰結である。重心系では全運動量は o であり、運動エネルギーは換算質量（reduced mass）$\mu = \frac{mM}{m+M}$ を用いて $\frac{1}{2}\mu$(相対速度の大きさ)^2 と表され、損失は $\frac{1}{2}\mu(1-e^2)(u-v)^2$ となる。換算質量と重心系は、二体問題の軌道や粒子の散乱でも再び登場する。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、これらの考え方が丁寧に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。