解答例

STEP I 2009、第 10 問

力学 ・ 斜面上の連結質点

STEP I 2009、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

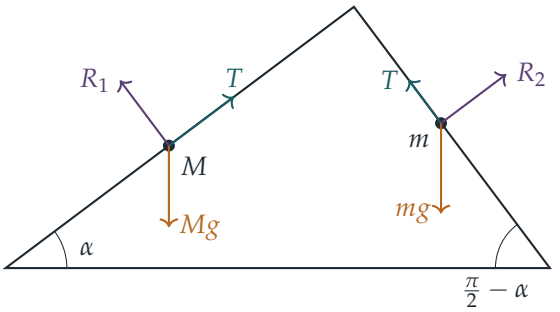
step.maths.org/questions/09-s1-q10

鍵となる考え方

糸は伸びない糸（inextensible string）であり、滑車はなめらか（smooth）なので、2 つの質点は 1 つの系として運動する。すなわち、M が斜面に沿って距離 s だけ下ると、m は自分の斜面に沿って同じ距離 s だけ上り、張力（tension）は両側で等しい。そこで、斜面に沿った重力の 2 つの成分を比較し、各質点についてニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）を用いれば、共通の加速度（acceleration）が得られる。最後の部分は、1 変数 α についての通常の微分による最大化問題となる。

解答

質点はなめらかな斜面上の質点としてモデル化し、軽くて伸びない糸がなめらかな滑車にかけられているとし、系は静止状態から動き始めるものとする。張力を T、M と m にはたらく垂直抗力（normal reaction）をそれぞれ R_1、R_2 とする。



頂点の角は $\pi - \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$ であるから、2 つの斜面は直交している。傾斜角 α の

斜面に沿って下向きの重力の成分は $Mg\sin\alpha$ であり、傾斜角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ の斜面に沿って下向きの成分は $mg\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=mg\cos\alpha$ である。垂直抗力は斜面に垂直なので、斜面に沿った運動には関与しない。

小問 (i)

「M が斜面を下り、m が斜面を上る」向きを正とし、加速度を a とする。各斜面に沿って力を分解すると、

$$\begin{aligned} M:&\quad Mg\sin\alpha - T = Ma,\\ m:&\quad T - mg\cos\alpha = ma. \end{aligned}$$

辺々を加えると T が消去されて、

$$a=\frac{g\,(M\sin\alpha - m\cos\alpha)}{M+m}.$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ では $\cos\alpha>0$ であるから、

$$a>0 \iff M\sin\alpha > m\cos\alpha \iff \tan\alpha > \frac{m}{M}.$$

したがって $\tan\alpha>\frac{m}{M}$ ならば、静止状態から動き始めた系は正の向きに加速する。すなわち、題意のとおり M は斜面を滑り下りる。

> ? **考えてみよう** 糸がたるまず張ったままであり、したがってこれらの方程式が正しいものであると、どうしてわかるのだろうか。

2 番目の式から $T=m(a+g\cos\alpha)$ であり、これは $a>0$ のとき正であるから、糸が張っていることと矛盾しない。また、糸がたるむことはありえない。もしたるんだとすれば、各質点はそれぞれの斜面を下ることになり、両方とも滑車から遠ざかるので、より長い糸が必要になってしまうからである。

小問 (ii)

今度は $\tan\alpha=\frac{2m}{M}$ であるから $m=\frac{1}{2}M\tan\alpha$ であり、また $\tan\alpha>\frac{m}{M}$ であるから、小問 (i) より、運動はやはり M が下る向きである。$m=\frac{1}{2}M\tan\alpha$ を代入して M を約分すると、

$$\begin{aligned} a&=\frac{g\,(M\sin\alpha-\frac{1}{2}M\tan\alpha\cos\alpha)}{M+\frac{1}{2}M\tan\alpha}=\frac{g\,(\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha)}{1+\frac{1}{2}\tan\alpha}=\frac{\frac{1}{2}g\sin\alpha}{\frac{1}{2}(2+\tan\alpha)}\\ &=\frac{g\sin\alpha}{\tan\alpha+2}, \end{aligned}$$

ここで $\tan\alpha\cos\alpha=\sin\alpha$ を用いた。これが求める加速度の大きさである。

最大化。比 m/M は $\tan\alpha = 2m/M$ によって α を定めるので、次を最大化すればよい。

$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha + 2}, \qquad 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2}.$$

商の微分法（quotient rule）と $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\tan\alpha = \sec^2\alpha$ により、

$$f'(\alpha) = \frac{\cos\alpha\,(\tan\alpha + 2) - \sin\alpha\sec^2\alpha}{(\tan\alpha + 2)^2} = \frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha - \dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}}{(\tan\alpha + 2)^2}.$$

分子に $\cos^2\alpha > 0$ を掛け、$1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ を用いると、

$$\cos^2\alpha\,(\sin\alpha + 2\cos\alpha) - \sin\alpha = 2\cos^3\alpha - \sin\alpha\,(1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^3\alpha - \sin^3\alpha.$$

よって $f'(\alpha)$ の符号は $2\cos^3\alpha - \sin^3\alpha = \cos^3\alpha\,(2 - \tan^3\alpha)$ の符号と一致する。$\tan\alpha$ が 0 から ∞ まで増加するとき、これは $\tan^3\alpha < 2$ の間は正、$\tan^3\alpha > 2$ となると負である。ゆえに f は増加した後に減少し、その最大値は唯一の停留点（stationary point）

$$\tan^3\alpha = 2.$$

でとる。（区間上で $f > 0$ であり、両端で $f \to 0$ となることからも、これが最大であることがわかる。）$\tan\alpha = \frac{2m}{M}$ を用いると、これは

$$\frac{8m^3}{M^3} = 2, \qquad \text{すなわち} \qquad 4m^3 = M^3,$$

となり、題意が示された。

検算

- 小問 (i) の極限の場合：$m = 0$ とすると $a = g\sin\alpha$ となり、なめらかな斜面上の単独の質点の場合に一致する。また $\tan\alpha = m/M$ のときは $a = 0$ となり、つり合いの状態である。
- 最適な状態では $\tan\alpha = 2^{1/3} \approx 1.26$ であるから、$\alpha \approx 51.6°$、$m/M = 4^{-1/3} \approx 0.63$ である。$(0, \frac{\pi}{2})$ 上で f をグリッド探索すると、最大値は同じ α でとられ、その値は $f \approx 0.240$ であった。よって最大の加速度はおよそ $0.240g$ である。
- 質量と角度を無作為に選んで試したところ、$\tan\alpha = 2m/M$ のときはいつも小問 (i) の一般式が小問 (ii) の式と一致し、2 つの運動方程式はいずれも同じ正の張力を与えた。

よくある間違い

- m に対して $mg\sin\alpha$ を用いてしまう。その斜面の傾斜角は $\frac{\pi}{2} - \alpha$ なので、成分は $mg\cos\alpha$ である。

- a が α のみに依存することに気づかずに、m を固定して M を動かして（あるいはその逆で）最大化しようとする。すべてを α で表せば、1 変数の問題になる。

STEP のその先へ

このように物体どうしが束縛条件で結ばれた系は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点である。座標を 1 つ（ここでは糸に沿って動いた距離 s）選べば、張力や垂直抗力のような束縛力（constraint force）は自動的に式から消える。大学 1 年次の講義では、これを滑車や振り子をはじめ、さらに多くの場面で使える体系的な方法へと発展させる。この水準のニュートン力学をわかりやすく扱った本としては、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。