解答例

STEP I 2009、第 1 問

純粋数学 • 約数の個数

> **STEP I 2009、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/09-s1-q1

鍵となる考え方

$p^a q^b$（p, q は相異なる素数（prime））の約数（factor）はすべて $0 \le i \le a, 0 \le j \le b$ を満たす $p^i q^j$ の形であり、素因数分解の一意性（unique factorisation）により、(i, j) の選び方が異なれば異なる約数が得られる。したがって約数の個数は積 $(a+1)(b+1)$ となり、素数がいくつあっても同様のことが成り立つ。真の約数（proper factor）の個数を数えるには 2 を引けばよく、どちらの小問も、ある数を積として表す問題に帰着する。

解答

N の正の約数の個数を、1 と N を含めて $d(N)$ と書く。

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

で、p_i が相異なる素数、$a_i \ge 1$ であるとすると、N の正の約数は $0 \le e_i \le a_i$ を満たす $p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ の形である。各 e_i の選び方は $a_i + 1$ 通りあり、素因数分解の一意性により、異なる選び方からは異なる約数が得られる。よって

$$d(N) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1).$$

$N > 1$ のとき約数 1 と N は異なるので、真の約数の個数は $d(N) - 2$ である。

小問 (i)

$3^2 \times 5^3$ については $d = (2+1)(3+1) = 12$ であるから、真の約数は $12 - 2 = 10$ 個であり、題意のとおりである。

次に $3^m \times 5^n$ を考える。これが整数であり、そもそも真の約数をもつためには $m, n \geq 0$ でなければならない（3 や 5 の負の累乗は、もう一方の素数によって打ち消されることはない）。約数は $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n$ を満たす $3^i 5^j$ であるから、$d = (m+1)(n+1)$ である（これは $m = 0$ や $n = 0$ の場合も含む）。求める条件は

$$(m+1)(n+1) = 12,$$

すなわち、12 を順序を考慮して二つの正の整数の積に分解することである。そのような分解は

$$1 \times 12, \quad 2 \times 6, \quad 3 \times 4, \quad 4 \times 3, \quad 6 \times 2, \quad 12 \times 1,$$

であり、これらから

$$(m, n) = (0, 11),\ (1, 5),\ (2, 3),\ (3, 2),\ (5, 1),\ (11, 0).$$

が得られる。やはり素因数分解の一意性により、これらはそれぞれ異なる整数を与える。このうち $(2, 3)$ は与えられた数であるから、真の約数を 10 個もつこの形の**他の**整数はちょうど **5** 個であり、それらは $5^{11}, 3 \times 5^5, 3^3 \times 5^2, 3^5 \times 5, 3^{11}$ である。

小問 (ii)

$d(N) = 426 + 2 = 428$ が必要であり、

$$428 = 2^2 \times 107,$$

である。ここで 107 は素数である（2, 3, 5, 7 のいずれでも割り切れず、$11^2 > 107$ だからである）。

> **考えてみよう** N の素因数分解として、どのような形がありうるか？

各 $a_i + 1$ はいずれも 2 以上で、その積は 428 である。107 は素数なので、これらのうちちょうど一つが 107 の倍数であり、それは 107, 214, 428 のいずれかである。残りのものの積はそれぞれ 4, 2, 1 となる。順序を無視すると、$a_i + 1$ の組としてありうるのは

$$\{428\}, \qquad \{214, 2\}, \qquad \{107, 4\}, \qquad \{107, 2, 2\},$$

であり、したがって指数の多重集合は

$$\{427\}, \qquad \{213, 1\}, \qquad \{106, 3\}, \qquad \{106, 1, 1\}.$$

である。

> **考えてみよう** 指数が与えられたとき、それぞれをどの素数に割り当てればよいか？

与えられた指数の組に対して N をできるだけ小さくするには、最も小さい素数たちを用い、最大の指数を最小の素数に割り当てればよい。使える素数のうち最小のものを用いるのが最善であることは明らかである。ある素数を、まだ使っていないより小さい素数に置き換えれば N は小さくなるからである。また、$p < q$ であるのに p の指数が a、q の指数が b で $a < b$ となっているならば、両者を入れ替えると N は

$$\frac{p^b q^a}{p^a q^b} = \left(\frac{p}{q}\right)^{b-a} < 1,$$

倍になるので、入れ替えによって N は小さくなる。よって、各形における最良の候補は

$$2^{427}, \qquad 2^{213} \times 3, \qquad 2^{106} \times 3^3, \qquad 2^{106} \times 3 \times 5.$$

である。これらを比較すると、

- $2^{106} \times 3 \times 5 = 2^{106} \times 15 < 2^{106} \times 27 = 2^{106} \times 3^3$；
- $2^{106} \times 27 < 2^{106} \times 2^5 = 2^{111}$ であり、これは $2^{213} \times 3$ や 2^{427} よりはるかに小さい。

したがって

$$N = 2^{106} \times 3 \times 5.$$

である。検算として、$d(N) = 107 \times 2 \times 2 = 428$ であるから、N は真の約数を 426 個もつ。

検算

- 小さな場合として、$3 \times 5^5 = 9375$ の約数を直接書き出す。$i \in \{0,1\}, j \in \{0,\ldots,5\}$ に対する $3^i 5^j$ で約数は 12 個となり、真の約数は 10 個である。
- $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = 428$ を満たすすべての指数パターン $2^a 3^b 5^c 7^d$ について簡単なコンピュータ探索を行うと、最小のものは $2^{106} \times 15 \approx 1.22 \times 10^{33}$ であり、次に小さいのは $2^{106} \times 27$ であることが確かめられる。

よくある間違い

- 小問 (i) で 6 と答えてしまう。問題は**他の**整数を問うているので、与えられた数は除かれる。
- $m = 0$ や $n = 0$ の場合（すなわち 5^{11} と 3^{11}）を忘れる。これらも求める形をしている。

- 小問 (ii) の答えはできるだけ多くの素数を使うはずだと思い込む。107 が素数であることから非常に大きな指数が一つ必ず現れ、実際に選択の余地があるのは因数 4 の分け方だけである。

STEP のその先へ

関数 $d(N)$ は**乗法的**関数（multiplicative function）である。すなわち、m と n が互いに素（coprime）であれば $d(mn) = d(m)d(n)$ が成り立ち、これがまさにここで用いた積の公式である。自分より小さいどの数よりも多くの約数をもつ数は、ラマヌジャン（Ramanujan）の**高度合成数**（highly composite numbers）であり、小問 (ii) の指数を入れ替える議論は、彼による高度合成数の記述の第一歩である。素因数分解の一意性や数論的関数（arithmetic functions）について読むには、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。