解答例

STEP III 2008、第 9 問

力学 ・ 摩擦と変化する力

STEP III 2008、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

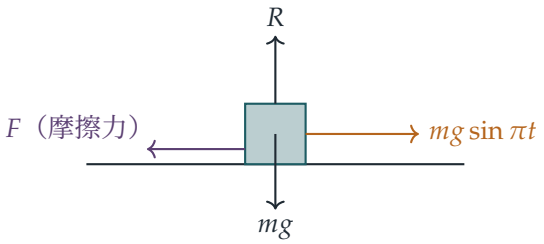
step.maths.org/questions/08-s3-q9

鍵となる考え方

摩擦には二つの状態がある。質点（particle）が静止している間は、静止摩擦力（static friction）が加えられた力とちょうど釣り合う（ただし限度 μmg まで）ので、加速度は 0 である。質点が滑り始めると、摩擦力は一定の大きさ μmg をもち、速度と逆向きにはたらく。したがって加速度のグラフは、値が 0 の平らな部分と、平行移動した正弦曲線とをつないだものになる。「静止する」とは、運動開始から加速度のグラフの下の面積として表される速度が、再び 0 に戻ることを意味する。

解答

物体を粗い水平面（rough horizontal plane）上の質点としてモデル化する。垂直抗力（normal reaction）は $R = mg$ であるから、摩擦力の大きさは静止時には高々 μmg、滑っているときにはちょうど μmg である。$\sin \pi t > 0$ のときの力の向きを正の向きとし、加速度と速度をそれぞれ a、v とする。



動き始め

鉛直方向の力の釣り合いより $R = mg$ である。質点が静止している間、水平方向の釣り合いには大きさ $mg|\sin \pi t|$ の摩擦力が必要であり、これは $mg|\sin \pi t| \le \mu mg$ である限り可能である。質点が初めて動くのは、加えられた力が初めて最大摩擦力（limiting friction）を上回るときであるから、（$\mu < 1$ のとき）

$$\sin \pi T_0 = \mu, \qquad \text{すなわち} \qquad T_0 = \frac{1}{\pi} \arcsin \mu, \quad 0 \le T_0 < \tfrac{1}{2}.$$

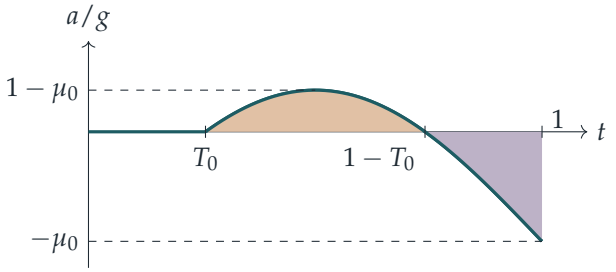
となる。（$\mu \ge 1$ ならば質点は決して動かない。）

小問 (i)

$0 \le t \le T_0$ では質点は静止しているので $a = 0$ である。$t > T_0$ では質点は正の向きに滑り、摩擦力 $\mu_0 mg$ が後ろ向きにはたらくので、ニュートンの第二法則（Newton's second law）より

$$a = g(\sin \pi t - \mu_0) \qquad (\text{ただし} v > 0).$$

を得る。これは $t = T_0$ で 0 から始まり、$t = \frac{1}{2}$ で $g(1 - \mu_0)$ まで増加し、（対称性 $\sin \pi(1 - t) = \sin \pi t$ により）$t = 1 - T_0$ で再び 0 に戻り、その後は負となって $t = 1$ で $-\mu_0 g$ に達する。



速度は T_0 からのこのグラフの下の面積である。曲線が軸より上にある間（琥珀色の領域）は速度が増加し、$1 - T_0$ 以降（紫色の領域）は減少する。二つの面積が釣り合うまで速度は正のままであり、釣り合った瞬間に質点は止まる。したがって

$$v(1) = \int_{T_0}^{1} g(\sin \pi t - \mu_0)\, \mathrm{d}t = 0.$$

となればよい。ここで

$$\begin{aligned} \int_{T_0}^{1} (\sin \pi t - \mu_0)\, \mathrm{d}t &= \Big[-\frac{\cos \pi t}{\pi} \Big]_{T_0}^{1} - \mu_0 (1 - T_0) \\ &= \frac{1 + \cos \pi T_0}{\pi} - \mu_0 + \mu_0 T_0. \end{aligned}$$

である。これを 0 とおいて π を掛けると

$$1+\cos\pi T_0-\mu_0\pi+\mu_0\,\pi T_0=0.$$

となる。

? **考えてみよう** $\cos\pi T_0$ を μ_0 で表すとき、符号はどちらになるか？

$0\le\pi T_0<\frac{\pi}{2}$ であるから余弦は正であり、$\cos\pi T_0=\sqrt{1-\sin^2\pi T_0}=(1-\mu_0^2)^{1/2}$ となる。また $\pi T_0=\arcsin\mu_0$ である。これらを両方代入すると

$$1+\left(1-\mu_0^2\right)^{\frac{1}{2}}-\mu_0\pi+\mu_0\arcsin\mu_0=0,$$

となり、示すべき式が得られた。（数値的には $\mu_0\approx0.7246$、$T_0\approx0.258$ である。）

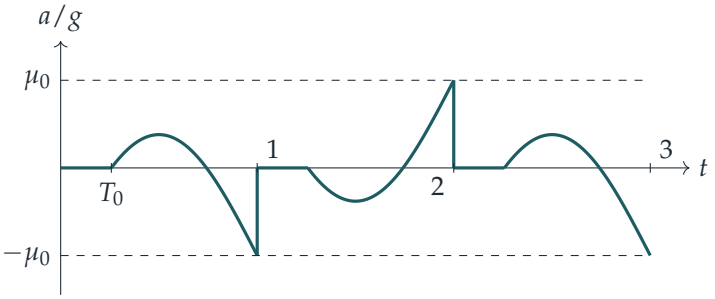
小問 (ii)

$t=1$ において質点は静止しており、加えられた力は $mg\sin\pi=0$ である。$1<t<2$ では力は負の向きで、大きさは $mg|\sin\pi t|$ である。これは $|\sin\pi t|=\mu_0$ となるまでは $\mu_0 mg$ より小さく、そうなるのは（$\sin\pi(1+T_0)=-\sin\pi T_0$ より）初めて $t=1+T_0$ のときである。したがって $1\le t\le1+T_0$ では質点は静止したままで、$a=0$ である。

その後、質点は負の向きに滑り、摩擦力は正の向きにはたらくので

$$a=g(\sin\pi t+\mu_0).$$

となる。$\sin\pi(t+1)=-\sin\pi t$ であるから、これは小問 (i) における時刻 $t-1$ での加速度のちょうど符号を反転したものである。よって $[1,2]$ における運動は $[0,1]$ における運動の鏡像になる。速度は以前の速度の符号を反転したものとなるので、質点は同じ距離を戻ったうえで $t=2$ で再び静止する。このとき質点は静止しており、加えられた力は 0 であって、これは $t=0$ での状況とまったく同じである。したがって $[2,3]$ では $[0,1]$ の運動が繰り返される。



$t = 1$ と $t = 2$ における縦の線分は、加速度の跳びを表している。質点が止まった瞬間に、動摩擦力（kinetic friction、大きさ $\mu_0 mg$）が静止摩擦力に置き換わり、静止摩擦力は 0 である加えられた力と釣り合いさえすればよいからである。

$\mu = \mu_0$ のときの運動。 質点は $t = T_0$ まで静止し、前方へ滑って $t = 1$ で止まり、$t = 1 + T_0$ まで待ってから後方へ滑り、$t = 2$ で出発点に止まる。以下同様である。質点は周期 2 で同じ区間を行き来し、両端でそれぞれ時間 T_0 だけ停止する。（もう一度積分すると、この区間の長さは $g[\mu_0/\pi^2 - (1 - T_0)(1 - \sqrt{1 - \mu_0^2})/(2\pi)] \approx 0.0367g$ となるが、これは問われていない。）

$\mu = 0$ のときの運動。 このとき $T_0 = 0$ であり、常に $a = g \sin \pi t$ であるから

$$v = \frac{g}{\pi}(1 - \cos \pi t) \geq 0, \qquad x = \frac{g}{\pi}\left(t - \frac{\sin \pi t}{\pi}\right).$$

となる。速度は決して負にならず、0 となるのは $t = 0, 2, 4, \ldots$ のときだけである。したがって質点は決して引き返さない。偶数の時刻に一瞬静止しながら、押し出されるように前進し、周期 2 ごとに $2g/\pi$ だけ進む。平均の速さは g/π である。粗い面の場合に質点を $t = 1$ で止めるのは摩擦である。摩擦がなければ、力の後ろ向きの半周期は質点を速度 0 まで減速させるだけである。

検算

小問 (i) の方程式を二分法（bisection）で解くと $\mu_0 \approx 0.72461$ となり、よって $T_0 \approx 0.25798$ である。$g = 9.8$ として、静止摩擦と動摩擦を切り替えながら $0 \leq t \leq 3$ における運動を数値シミュレーションすると、質点は $t \approx 0.258$ で動き始め、0.3598 だけ進んで $t = 1.000$ で止まり、$t \approx 1.258$ で戻り始めて $t = 2.000$ で出発点に止まる。これは $0.0367g$ と一致する。$\mu = 0$ の場合、シミュレーションは $x = g(t - \sin \pi t/\pi)/\pi$ と一致する。方程式の簡単な妥当性確認として、$\mu_0 = 0$ のとき左辺は $2 > 0$、$\mu_0 = 1$ のとき $1 - \pi/2 < 0$ であるから、$(0, 1)$ に解が存在する。

よくある間違い

- $t = 0$ から $a = g(\sin \pi t - \mu)$ とすること。T_0 より前は質点は静止しており摩擦は静止摩擦なので、$a = 0$ である。
- 小問 (ii) で質点が向きを変えた後も、摩擦力を同じ向きのままにしておくこと。摩擦力は常に速度と逆向きにはたらく。
- 質点が $t = 1 - T_0$ で止まると考えること。そこで 0 になるのは加速度であって、速度ではない。

STEP のその先へ

「固着」と「滑り」の間で切り替わる摩擦があると、運動方程式は区分的になり、加速度は不連続になる。これはきしむドアや弓で弾くバイオリンの弦の背後にあるスティック・スリップ（stick–slip）現象であり、非平滑力学系（non-smooth dynamical system）の最初の例である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦のモデルと強制運動をちょうどよい水準で論じている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。