解答例

STEP III 2008、第 8 問

純粋数学 • 級数と漸化式

> **STEP III 2008、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q8

鍵となる考え方

係数が線形漸化式（linear recurrence）を満たすということは、級数に適切な多項式を掛ければほとんどすべての項が打ち消し合うということである。その多項式は漸化式からそのまま読み取れる。$a_{r+1}+pa_r=0$ からは $1+px$ が、$a_{r+2}+pa_{r+1}+qa_r=0$ からは $1+px+qx^2$ が得られる。残るのは短い多項式だけなので、和は有理関数（rational function）になる。有限和の場合も同じ方法が使えるが、末尾にいくつか余分な項が残る。別の方法として、部分分数分解（partial fractions）を用いれば級数を等比級数（geometric series）に分けることができ、等比級数ならば和の求め方はわかっている。

解答

小問 (i)

ここでは級数は x の項から始まるので、$a_1=\frac{1}{3}$、$a_2=\frac{1}{6}$、$a_3=\frac{1}{12}$ である。各係数は直前の係数の半分であるから、$a_{r+1}-\frac{1}{2}a_r=0$ であり、

$$p=-\tfrac{1}{2}.$$

（定数項はない。漸化式は $a_1,a_2,a_3,\ldots$ を結びつけるものであり、$r=0$ については何も述べていない。）漸化式を解くと $a_r=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$ を得る。

無限級数の和。 $1-\frac{1}{2}x$ を掛けると

$$\left(1-\tfrac{1}{2}x\right)S=a_1x+\sum_{r\geq 1}\left(a_{r+1}-\tfrac{1}{2}a_r\right)x^{r+1}=\tfrac{1}{3}x,$$

となる。漸化式により括弧の中はすべて 0 になるからである。したがって

$$S = \frac{\frac{1}{3}x}{1-\frac{1}{2}x} = \frac{2x}{3(2-x)}.$$

これは公比 $\frac{1}{2}x$ の等比級数であるから、無限級数の和が存在するのはちょうど $|x| < 2$ のときである。

初めの $n+1$ 項。 これは $x, x^2, \ldots, x^{n+1}$ の項である。$S_{n+1} = \sum_{r=1}^{n+1} a_r x^r$ とおく。同じ掛け算を行うと、途中の項はやはりすべて打ち消し合うが、最高次の項 $-\frac{1}{2}a_{n+1}x^{n+2}$ には相手がいない。

$$\left(1-\tfrac{1}{2}x\right) S_{n+1} = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}a_{n+1}x^{n+2} = \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} x^{n+2} = \tfrac{1}{3}x\left(1-\left(\tfrac{x}{2}\right)^{n+1}\right).$$

よって、$x \neq 2$ のとき

$$S_{n+1} = \frac{2x}{3(2-x)}\left(1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}\right).$$

$x = 2$ のときはすべての項が $\frac{2}{3}$ に等しいので、$S_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)$ である。

小問 (ii)

今度は $a_0 = 2$、$a_1 = 8$、$a_2 = 18$、$a_3 = 37$ である。漸化式に $r = 0$ と $r = 1$ を代入すると、次の 2 式を得る。

$$18 + 8p + 2q = 0, \qquad 37 + 18p + 8q = 0.$$

第 1 式から $q = -9 - 4p$ である。これを第 2 式に代入すると $37 + 18p - 72 - 32p = 0$ となるので、$p = -\frac{5}{2}$、したがって $q = 1$ である。漸化式は

$$a_{r+2} - \tfrac{5}{2}a_{r+1} + a_r = 0.$$

無限級数の和。 $1 + px + qx^2 = 1 - \frac{5}{2}x + x^2$ を掛ける。積における x^{r+2} の係数は、すべての $r \geq 0$ に対して $a_{r+2} - \frac{5}{2}a_{r+1} + a_r = 0$ である。残るのは x^0 と x^1 の係数だけである。

$$\left(1-\tfrac{5}{2}x+x^2\right) T = a_0 + \left(a_1 - \tfrac{5}{2}a_0\right) x = 2 + 3x.$$

分母と分子を 2 倍し、$2 - 5x + 2x^2 = (1-2x)(2-x)$ と因数分解すると

$$T = \frac{4+6x}{(1-2x)(2-x)}.$$

部分分数分解。 $\dfrac{4+6x}{(1-2x)(2-x)} = \dfrac{A}{1-2x} + \dfrac{B}{2-x}$ とおく。隠蔽法（cover-up）を $x=\frac{1}{2}$ で用いると $A = \dfrac{7}{3/2} = \frac{14}{3}$、$x=2$ で用いると $B = \dfrac{16}{-3} = -\frac{16}{3}$ を得る。よって

$$T = \frac{14}{3}\cdot\frac{1}{1-2x} - \frac{8}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}x}.$$

各項を等比級数として展開すると

$$a_r = \tfrac{14}{3}\,2^r - \tfrac{8}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^r.$$

確認：$r=0,1,2,3$ とすると、それぞれ 2、$\frac{28}{3}-\frac{4}{3}=8$、$\frac{56}{3}-\frac{2}{3}=18$、$\frac{112}{3}-\frac{1}{3}=37$ となり、確かに一致する。

> **考えてみよう** 無限級数の和が実際に存在するのは、どのような x に対してか？

2 つの等比級数がともに収束（converge）する必要があるので、$|2x|<1$ かつ $|\frac{1}{2}x|<1$ でなければならない。第 1 の条件の方が厳しいので、$|x|<\frac{1}{2}$ が必要である。

初めの $n+1$ 項。 これは x^0 から x^n までの項である。各等比級数を $n+1$ 項まで足し合わせると、$x\neq\frac{1}{2},2$ のとき

$$\sum_{r=0}^{n} a_r x^r = \frac{14}{3}\cdot\frac{1-(2x)^{n+1}}{1-2x} - \frac{16}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{2-x}.$$

（第 2 の分数は $\frac{8}{3}\cdot\frac{1-(x/2)^{n+1}}{1-x/2}$ の分母と分子を 2 倍したものである。）$x=\frac{1}{2}$ または $x=2$ のときは、対応する等比級数の和は単に 1 を $n+1$ 個足したものになる。

検算

- $|x|<\frac{1}{2}$ として $n\to\infty$ とすると、累乗 $(2x)^{n+1}$ と $(x/2)^{n+1}$ は 0 に近づき、T の部分分数分解の形が得られる。小問 (i) でも $|x|<2$ のとき同じことが起こる。
- $n=0$ とすると、小問 (i) の式は $\frac{2x}{3(2-x)}\cdot\frac{2-x}{2} = \frac{1}{3}x$ を与える。小問 (ii) の式は $\frac{14}{3}-\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{2}=2$ を与える。どちらも確かに初項になっている。
- 数値的には、$x=0.3$ のとき $T = \dfrac{5.8}{0.4\times 1.7} \approx 8.5294$ であり、$2+8x+18x^2+37x^3+\cdots$ の部分和はこの値に近づいていく。

よくある間違い

- 小問 (i) で、初項を a_0x^0 としてしまうこと。級数は x^1 から始まるので、初めの $n+1$ 項は x^{n+1} までである。
- **有限**和に $1+px$ を掛けるときに、末尾に残る項を忘れること。$(\frac{x}{2})^{n+1}$ という因子を生み出すのはまさにこれらの項である。
- T について $|x|<2$ と答えてしまうこと。収束半径（radius of convergence）を決めるのは、原点に近い方の根 $x=\frac{1}{2}$ である。

STEP のその先へ

べき級数（power series）$\sum a_r x^r$ は数列 (a_r) の**母関数**（generating function）である。定数係数の線形漸化式からは必ず有理関数の母関数が得られ、その関数の極（pole）によって、a_r の一般項の閉じた式と収束半径の両方が決まる。母関数は組合せ論や確率論における標準的な道具であり、べき級数の収束半径については大学 1 年次の解析学で丁寧に扱われる。収束に関する側面については、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）がよく解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。