解答例

STEP III 2008、第 7 問

純粋数学 • 複素数と図形

STEP III 2008、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s3-q7

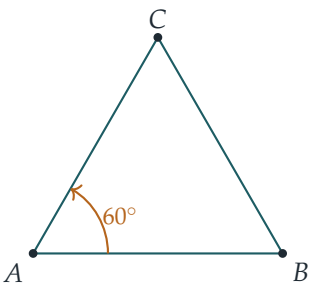
鍵となる考え方

アルガン図（Argand diagram）において、$e^{i\pi/3}$ を掛けることは反時計回り（anticlockwise）に 60° 回転（rotation）させることである。正三角形（equilateral triangle）とは、まさに一辺をある頂点（vertex）のまわりに 60° 回転させたものなので、冒頭の関係式によって「正三角形である」という条件は a, b, c についての一次方程式に置き換わる。その後は、両小問とも帳簿づけのような作業である。新しい点をすべて元の点で表し、求める条件を確かめればよい。その条件とは、平行四辺形（parallelogram）であれば $p + r = q + s$、正三角形であれば冒頭の関係式そのものである。

解答

冒頭の関係式

$\omega = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおく。ABC は正三角形なので、AC は AB と同じ長さをもち、AB と 60° の角をなす。三角形の頂点は反時計回りに並んでいるので、$\overrightarrow{AB}$ から $\overrightarrow{AC}$ へは**反時計回り**に回る。したがって、$\overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ を $+60°$ 回転させたものである。



$$c-a=\omega(b-a)=\tfrac{1}{2}(b-a)+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}(b-a),$$
$$2c=2a+(b-a)+\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a)=(a+b)+\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a),$$

となり、これが求める結果である。

頂点が時計回り（clockwise）に並んでいる場合は、$\overrightarrow{AC}$ は $\overrightarrow{AB}$ を -60° 回転させたものなので、$\bar{\omega}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ として $c-a=\bar{\omega}(b-a)$ となる。同じ計算により

$$2c=(a+b)-\mathrm{i}\sqrt{3}(b-a).$$

を得る。逆（converse）に、どちらかの関係式を満たす c は ABC を正三角形にする。なぜなら、それぞれの関係式は $c-a=\omega^{\pm1}(b-a)$ と同値だからである。したがって、三角形が正三角形であることを**示す**には、これらの関係式のどちらか一方を確かめれば十分である。

小問 (i)

4 つの頂点はこちらで選んでよく、それぞれを辺のどちら側に置いてもよい。冒頭の結果を、新しい頂点を c の役割として用いて、次のようにおく。

$$\begin{aligned}
2p&=(d+e)+\mathrm{i}\sqrt{3}(e-d) && (D,E,P\text{ 反時計回り}),\\
2q&=(e+f)-\mathrm{i}\sqrt{3}(f-e) && (E,F,Q\text{ 時計回り}),\\
2r&=(f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}(g-f) && (F,G,R\text{ 反時計回り}),\\
2s&=(g+d)-\mathrm{i}\sqrt{3}(d-g) && (G,D,S\text{ 時計回り}).
\end{aligned}$$

冒頭の議論により、このとき PDE, QEF, RFG, SGD はいずれも正三角形である。

? **考えてみよう** すべての三角形を辺の同じ側に置くのではなく、向きを交互にするのはなぜか。

実際に試してみるとよい。$PQRS$ が平行四辺形であるのは、$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{SR}$、すなわち $q-p=r-s$、つまり $p+r=q+s$ のときであり、そのときに限る。（これは対角線（diagonal）PR と QS が同じ中点（midpoint）をもつことを意味する。）上の選び方のもとでは

$$2(p+r)=(d+e+f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}\,(e-d+g-f),$$
$$2(q+s)=(d+e+f+g)-\mathrm{i}\sqrt{3}\,(f-e+d-g)=(d+e+f+g)+\mathrm{i}\sqrt{3}\,(e-d+g-f).$$

これらは等しいので、$p+r=q+s$ となり、$PQRS$ は平行四辺形である。もし代わりにすべてで「$+$」の符号を用いていたら、虚部は $\mathrm{i}\sqrt{3}(e-d+g-f)$ と $\mathrm{i}\sqrt{3}(f-e+d-g)$ になっていたはずである。これらが一致するのは $d+f=e+g$ のとき、すなわち

$DEFG$ がもともと平行四辺形であるときに限られる。符号を交互にすることで、どのような四角形（quadrilateral）に対しても $\sqrt{3}$ の項がそろうのである。

（四角形によっては、4 点がたまたま一直線上にある（collinear）こともあり、その場合は退化した（degenerate）平行四辺形となる。その場合でも条件 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$ は成り立っている。）

小問 (ii)

LMN の頂点が時計回りに並んでいる場合は、図全体を実軸（real axis）に関して折り返す（すなわち複素共役（complex conjugate）をとる）。折り返しによって、正三角形であること、重心（centroid）、および辺上の三角形が外側に描かれているかどうかは保たれるので、LMN の頂点が**反時計回り**に並んでいる場合を考えれば十分である。

このとき N は有向辺 $L \to M$ の左側にあり、LM 上の外側の三角形 LMX の頂点 X は右側にあるので、L, M, X は時計回りに並ぶ。

$$2x = (l+m) - \mathrm{i}\sqrt{3}(m-l).$$

LMX の重心は

$$u = \tfrac{1}{3}(l+m+x) = \tfrac{1}{3}(l+m) + \tfrac{1}{6}(l+m) - \tfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{6}(m-l) = \frac{l+m}{2} + \frac{\mathrm{i}(l-m)}{2\sqrt{3}},$$

である。ここで $\frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ を用いた。反時計回りの順序を保つ巡回 $l \to m \to n \to l$ を施すと

$$v = \frac{m+n}{2} + \frac{\mathrm{i}(m-n)}{2\sqrt{3}}, \qquad w = \frac{n+l}{2} + \frac{\mathrm{i}(n-l)}{2\sqrt{3}}.$$

を得る。U, V, W が反時計回りの関係式 $2w = (u+v) + \mathrm{i}\sqrt{3}(v-u)$ を満たすことを示す。まず

$$u + v = \tfrac{1}{2}l + m + \tfrac{1}{2}n + \frac{\mathrm{i}(l-n)}{2\sqrt{3}},$$
$$v - u = \tfrac{1}{2}(n-l) + \frac{\mathrm{i}(2m-l-n)}{2\sqrt{3}},$$
$$\mathrm{i}\sqrt{3}(v-u) = \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(n-l) - \tfrac{1}{2}(2m-l-n).$$

考えてみよう m はどのようにして消えるのか。

1 行目と 3 行目を加える。実部は $\frac{1}{2}l + m + \frac{1}{2}n - m + \frac{1}{2}l + \frac{1}{2}n = l + n$ となるので、m は実部から打ち消され、虚部にはもともと現れていない。虚部はまとめると

$$(n-l)\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\Big)\mathrm{i} = (n-l)\,\frac{3-1}{2\sqrt{3}}\,\mathrm{i} = \frac{\mathrm{i}(n-l)}{\sqrt{3}}.$$

となる。したがって

$$(u+v)+\mathrm{i}\sqrt{3}(v-u)=(n+l)+\frac{\mathrm{i}(n-l)}{\sqrt{3}}=2w.$$

冒頭の結果（およびその逆）により、UVW は頂点が反時計回りに並ぶ正三角形である。これがナポレオンの定理（Napoleon's theorem）である。

検算

- 冒頭の関係式：$a=0, b=2$ とすると $c=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ となり、頂点は実軸の上側にある。反時計回りの三角形であるから、そうなるべきである。
- 小問 (ii) で $l=0, m=6, n=6\mathrm{i}$ とする：公式から $u=3-\mathrm{i}\sqrt{3}, v=(3+\sqrt{3})(1+\mathrm{i})$, $w=-\sqrt{3}+3\mathrm{i}$ を得る。このとき UVW の 3 辺の長さの 2 乗はすべて $24+12\sqrt{3}$ である。
- 冒頭の関係式、平行四辺形の条件、ナポレオンの定理を、10^4 個のランダムな配置について数値的に検証した。また、小問 (i) ですべての辺に同じ向きを用いると一般には成り立たないことも確認した。

よくある間違い

- 小問 (ii) で外側の向きを取り違えること。反時計回りの LMN に対しては、LM 上の外側の頂点は L, M から見て**時計回り**の位置にある。符号を誤ると、代わりに内ナポレオン三角形が得られてしまう。（こちらも正三角形ではあるが、問題が求めているものではない。）
- 小問 (i) で、4 つの三角形をすべて同じ向きにしようとすること。それがうまくいくのは、$DEFG$ 自体が平行四辺形であるときだけである。
- 平行四辺形の判定に $p+q=r+s$ を用いること。対になるのは向かい合う頂点どうしであり、条件は $p+r=q+s$ である。

STEP のその先へ

根底にある考え方は、写像 $z\mapsto \alpha z+\beta$ がちょうど平面の回転、拡大（enlargement）、平行移動（translation）の全体であり、そのため幾何的な条件が $\mathbb{C}$ 上の一次方程式になる、ということである。冒頭の関係式をうまく言い換えると、ABC が正三角形であるのは $a+\omega^2 b+\omega^4 c=0$ または $a+\omega^4 b+\omega^2 c=0$ のときであり、そのときに限る。こうすると、ナポレオンの定理は数行の計算から自然に導かれる。Needham の *Visual*

Complex Analysis（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数の乗法に対するこの幾何的な見方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。