解答例

STEP III 2008、第 6 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP III 2008、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s3-q6

鍵となる考え方

どちらの方程式も y を x と傾き（slope）p で直接表しているが、p について解かれていないので、そのまま積分することはできない。x について微分すると y が消え（$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = p$ だからである）、x、p、$\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ の間の関係式が残る。この関係式を逆数にしてみると、p の関数としての x に関する線形（linear）一階微分方程式（first-order differential equation）となり、積分因子（integrating factor）によって解くことができる。そのあと $x(p)$ をもとの方程式に戻して y を求める。

解答

小問 (i)

$y = p^2 + 2xp$ を x について微分する。p^2 には連鎖律（chain rule）を、$2xp$ には積の微分法（product rule）を用い、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ を p で置き換えると

$$p = 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad \Longrightarrow \quad -p = (2p + 2x)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

? **考えてみよう** $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ をひっくり返して $\mathrm{d}x/\mathrm{d}p$ にしてよいのだろうか？

そのためには $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x \neq 0$ が必要である。上の式から、$p \neq 0$ であるところでは $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ と $2p + 2x$ はどちらも 0 でない。（いずれにせよ p で割るので、全体を通して $p \neq 0$ が必要である。）したがって

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2p + 2x}{p} = -2 - \frac{2x}{p},$$

と書くことができ、これが示すべき式である。

整理すると、これは x について線形である：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2}{p}x = -2.$$

積分因子は $\mathrm{e}^{\int 2/p\,\mathrm{d}p} = p^2$ であり、両辺に掛けると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2x) = -2p^2 \quad\Longrightarrow\quad p^2x = -\tfrac{2}{3}p^3 + A \quad\Longrightarrow\quad x = -\tfrac{2}{3}p + Ap^{-2},$$

となる。ここで A は任意定数である。これが問題文の結果である。

次に、$x = 2$ のとき $p = -3$ であることを用いる：

$$2 = -\tfrac{2}{3}(-3) + \frac{A}{9} = 2 + \frac{A}{9},$$

よって $A = 0$ であり $x = -\frac{2}{3}p$、すなわち $p = -\frac{3}{2}x$ である。これをもとの方程式に代入すると

$$y = p^2 + 2xp = \tfrac{9}{4}x^2 + 2x\left(-\tfrac{3}{2}x\right) = \tfrac{9}{4}x^2 - 3x^2,$$

したがって

$$y = -\tfrac{3}{4}x^2.$$

確かめると、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}x$ であり、これは確かに p に等しく、$x = 2$ で -3 となる。

小問 (ii)

ここでは $\ln p$ が現れるので $p > 0$ である。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p\ln p) = \ln p + 1$ を用いて、$y = 2xp + p\ln p$ を x について微分すると

$$p = 2p + 2x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + (\ln p + 1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \quad\Longrightarrow\quad -p = (2x + \ln p + 1)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}.$$

先ほどと同様に、$p \neq 0$ から $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x \neq 0$ が従うので

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{2x + \ln p + 1}{p} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{2}{p}x = -\frac{\ln p + 1}{p}.$$

積分因子はやはり p^2 である：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}(p^2x) = -p\ln p - p.$$

$u = \ln p$、$\mathrm{d}v = p\,\mathrm{d}p$ として部分積分（integration by parts）を行うと

$$\int p\ln p\,\mathrm{d}p = \tfrac{1}{2}p^2\ln p - \int \tfrac{1}{2}p\,\mathrm{d}p = \tfrac{1}{2}p^2\ln p - \tfrac{1}{4}p^2,$$

よって

$$\begin{aligned} p^2x &= -\tfrac{1}{2}p^2\ln p + \tfrac{1}{4}p^2 - \tfrac{1}{2}p^2 + B \\ &= -\tfrac{1}{2}p^2\ln p - \tfrac{1}{4}p^2 + B, \end{aligned}$$

であり

$$x = -\tfrac{1}{2}\ln p - \tfrac{1}{4} + Bp^{-2}.$$

$x = -\frac{1}{4}$ のとき $p = 1$ であることを用いると、$-\frac{1}{4} = 0 - \frac{1}{4} + B$ となるので $B = 0$ であり

$$x = -\tfrac{1}{2}\ln p - \tfrac{1}{4},$$

これが示すように求められた結果である。

y を求めるために、この式が $\ln p = -2x - \frac{1}{2}$ を意味することに注目する。至るところで p を代入するより、これをもとの方程式に代入するほうが早い：

$$y = 2xp + p\left(-2x - \tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{1}{2}p,$$

そして $p = \mathrm{e}^{-2x-1/2}$ であるから

$$y = -\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x-\frac{1}{2}}.$$

検算：$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2x-\frac{1}{2}} = p$ となり、当然そうなるべきとおりであり、$x = -\frac{1}{4}$ ではこれは $\mathrm{e}^0 = 1$ である。

検算

各小問で、最終的に得た y を微分し、その導関数が実際に用いた p に一致することを確かめる。$y = -\frac{3}{4}x^2$ からは $p = -\frac{3}{2}x$ が得られ、$p^2 + 2xp = \frac{9}{4}x^2 - 3x^2 = y$ となる。小問 (ii) では、$x = 0$ において $p = \mathrm{e}^{-1/2} \approx 0.6065$ であり、$2xp + p\ln p = 0.6065 \times (-0.5) \approx -0.3033 = y(0)$ となる。また数値的な検証により、A と B に無作為な値を与えたとき、一般のパラメータ曲線 $(x(p), y(p))$ の傾き $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ が p に等しいことも確認した。

よくある間違い

- 左辺の $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ が p であることを忘れ、打ち消し合って $-p$ が残ることに気づかない。
- 初期条件（initial condition）を用いる前に積分定数（constant of integration）を落としてしまう。ここではたまたま 0 になるが、それは定数を求めてみて初めてわかることである。

- 小問 (ii) で、$p \ln p$ を x について微分したものを $\ln p$ だけにしてしまい、因子 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ と余分な $+1$ を忘れる。

STEP のその先へ

$y = xf(p) + g(p)$ の形の方程式はダランベール（d'Alembert）の方程式（あるいはラグランジュ（Lagrange）の方程式）と呼ばれ、特別な場合 $y = xp + g(p)$ はクレロー（Clairaut）の方程式である。p を独立変数（independent variable）として扱う工夫は、これらすべてに通用する。これらの方程式は**特異解**（singular solutions）をもつこともある。特異解は $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ で割った箇所から生じ、一般解の族の包絡線（envelope）となっている。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、一階微分方程式とその解法が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。