解答例

STEP III 2008、第 5 問

純粋数学 ・ 漸化式

> **STEP III 2008、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q5

鍵となる考え方

量 $\mathrm{T}_n^2 - \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$ はこの漸化式（recurrence）の**不変量**（invariant）である。n を 1 だけ増やすと、漸化式によって $\mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n-1}$ を $2x\mathrm{T}_n$ で置き換えられるため、差が消えてしまうのである。不変量が 0 のときは、隣り合う項の比がすべて等しくなるので、この数列は等比数列（geometric sequence）になる。そこで等比数列を漸化式に代入すると、公比（common ratio）がある二次方程式（quadratic equation）の解として定まる。

解答

以下では x を固定し、$\mathrm{T}_n(x)$ を T_n、$\mathrm{f}(x)$ を f と書く。漸化式 $(*)$ は次を主張している。

$$\mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{T}_{n-1} = 2x\,\mathrm{T}_n \qquad (n \geq 1).$$

不変量

$n \geq 1$ に対して $D_n = \mathrm{T}_n^2 - \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$ とおく。すべての $n \geq 1$ について $D_n = f$ であることを数学的帰納法（induction）で証明する。

基底段階。 $D_1 = \mathrm{T}_1^2 - \mathrm{T}_0\mathrm{T}_2$ であり、これは定義により f である。

帰納段階。 ある $k \geq 1$ について $D_k = f$ が成り立つと仮定する。このとき

$$\begin{aligned} D_{k+1} - D_k &= \mathrm{T}_{k+1}^2 - \mathrm{T}_k\mathrm{T}_{k+2} - \mathrm{T}_k^2 + \mathrm{T}_{k-1}\mathrm{T}_{k+1} \\ &= \mathrm{T}_{k+1}(\mathrm{T}_{k+1} + \mathrm{T}_{k-1}) - \mathrm{T}_k(\mathrm{T}_{k+2} + \mathrm{T}_k) \\ &= \mathrm{T}_{k+1} \cdot 2x\mathrm{T}_k - \mathrm{T}_k \cdot 2x\mathrm{T}_{k+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。ただし3行目では、最初の括弧に $n=k$ として、2番目の括弧に $n=k+1$ として $(*)$ を用いた（$k\geq 1$ なので、どちらも適用してよい）。したがって $D_{k+1}=D_k=f$ であり、数学的帰納法により

$$\mathrm{T}_n^2-\mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}=f \quad \text{すべての} n\geq 1$$

が成り立つ。これが示すべきことであった。

$f\equiv 0$ の場合

まず、$f=0$ が $r=\mathrm{T}_1/\mathrm{T}_0$ について何を意味するかを調べよう。$n=1$ として $(*)$ を用いると $\mathrm{T}_2=2x\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_0$ であるから、$\mathrm{T}_1=r\mathrm{T}_0$ と書けば

$$f=\mathrm{T}_1^2-\mathrm{T}_0(2x\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_0)=\mathrm{T}_0^2(r^2-2xr+1),$$

となる。よって $\mathrm{T}_0\neq 0$ より

$$f=0 \iff r^2=2xr-1. \tag{†}$$

> **考えてみよう** 不変量から $\mathrm{T}_n^2=\mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$ が得られるので、比はすべて等しい。それなら単純に割り算をすればよいのではないか？

T_{n-1} で割るにはそれが0でないことが必要であり、そのためには別の議論がいる。「比が等しい」という発想から答えを予想し、(†) を使って漸化式そのものから証明するほうがすっきりしている。

主張。 すべての $n\geq 0$ について $\mathrm{T}_n=\mathrm{T}_0\,r^n$ である。

証明。 強い帰納法（strong induction）を用いる（連続する2つの場合をまとめて扱う）。$n=0$ のときは主張は自明であり、$n=1$ のときは r の定義から $\mathrm{T}_1=r\mathrm{T}_0$ なので成り立つ。$k\geq 1$ として、$n=k-1$ と $n=k$ について主張が成り立つと仮定する。このとき $(*)$ により

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{k+1}&=2x\mathrm{T}_k-\mathrm{T}_{k-1}=2x\mathrm{T}_0r^k-\mathrm{T}_0r^{k-1}\\&=\mathrm{T}_0r^{k-1}(2xr-1)=\mathrm{T}_0r^{k-1}\cdot r^2=\mathrm{T}_0r^{k+1},\end{aligned}$$

となる。ただし4番目の等号で (†) を用いた。よって $n=k+1$ についても主張は成り立ち、数学的帰納法によりすべての $n\geq 0$ について次が成り立つ。

$$\boxed{\mathrm{T}_n(x)=\mathrm{T}_0(x)\,(\mathrm{r}(x))^n}$$

$\mathrm{r}(x)$ のとりうる形

(†) より r は $r^2-2xr+1=0$ を満たすので、解の公式により

$$\mathrm{r}(x)=x+\sqrt{x^2-1} \qquad \text{または} \qquad \mathrm{r}(x)=x-\sqrt{x^2-1}.$$

逆に、どちらを選んでも (†) を満たすので $f \equiv 0$ となり、数列 $\mathrm{T}_0 r^n$ は確かに $(*)$ を満たす。2 つの解の積は 1 であるから、互いに逆数である。$|x| < 1$ のとき、これらは複素数 $x \pm \mathrm{i}\sqrt{1-x^2}$ となる。$x = \cos\theta$ と書けば $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$ となり、$\mathrm{T}_n = \mathrm{T}_0 \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}n\theta}$ である。

検算

- チェビシェフ多項式（Chebyshev polynomials）$\mathrm{T}_0 = 1$、$\mathrm{T}_1 = x$、$\mathrm{T}_2 = 2x^2 - 1$ では $f = x^2 - (2x^2 - 1) = 1 - x^2$ となり、実際すべての n について $\cos^2 n\theta - \cos(n-1)\theta \cos(n+1)\theta = \sin^2\theta$ が成り立つ。$x = \frac{3}{7}$ とすると、D_n の最初の 14 個の値はすべて $\frac{40}{49}$ に等しい。
- $r = 2$ とすると $x = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ であり、$\mathrm{T}_0 = 1$、$\mathrm{T}_1 = 2$ とする。漸化式から $\mathrm{T}_2 = \frac{5}{2} \cdot 2 - 1 = 4$、$\mathrm{T}_3 = \frac{5}{2} \cdot 4 - 2 = 8$ が得られ、主張どおり 2 のべき乗になっている。また、$x - \sqrt{x^2 - 1} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ がもう一方の解である。

よくある間違い

- $n = 0$ として $(*)$ を用いてしまうこと。漸化式は $n = 1$ から始まるので、基底段階は D_0 ではなく D_1 でなければならない（そもそも D_0 は定義されていない）。
- T_{n-1} が 0 でないことを確かめずに、$\mathrm{T}_n^2 = \mathrm{T}_{n-1}\mathrm{T}_{n+1}$ を T_{n-1} で割ってしまうこと。

STEP のその先へ

定数係数の線形漸化式（linear recurrence with constant coefficients）の解は $\alpha r_1^n + \beta r_2^n$ の形をしている。ここで r_1, r_2 はその特性方程式（characteristic equation）の解であり、今の場合は $r^2 - 2xr + 1 = 0$ である。条件 $f = 0$ は、等比数列の項がただ 1 つだけ残る場合をちょうど選び出している。一般には f は $\alpha\beta$ の定数倍である。不変量 D_n は、2 階微分方程式に対するロンスキアン（Wronskian）の離散版ともいえるものである。ロンスキアンは $y'' + q(x)y = 0$ に対しては定数となる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）ではロンスキアンが詳しく扱われており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）には STEP 形式の漸化式の問題がさらに収録されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。