解答例

STEP III 2008、第 4 問

純粋数学 ・ 逆双曲線関数の不等式

STEP III 2008、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s3-q4

鍵となる考え方

$x = \cosh y$ とおく。半角の公式（half-angle formula）により $\tanh(y/2)$ は x の代数関数（algebraic function）に書き換えられるので、tanh に関する自明な不等式（inequality）が、arcosh に関する自明でない不等式に変わる。そのあと、この問題はちょっとした「からくり」を回す。すなわち、不等式を 1 から x まで積分し、式を整理して、より精密な不等式を得るのである。このからくりを 2 回回すと、(ii)、続いて (iii) が得られる。

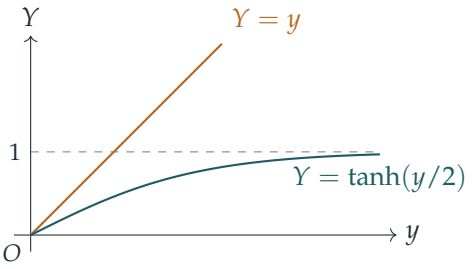
解答

以下、$x \geq 1$ に対して $A(x) = \operatorname{arcosh} x$、$S(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ と書く。必要となる 2 つの導関数（derivative）は次のとおりである。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sqrt{x^2 - 1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (x > 1).$$

小問 (i)

曲線 $Y = \tanh(y/2)$ は傾き $\frac{1}{2}$ で原点を通り、$y > 0$ で上に凸（concave）であり、決して 1 に達しない。一方、直線 $Y = y$ の傾きは 1 である。



すべての $y > 0$ に対して、直線は曲線より上にある。これを厳密に示すため、$g(t) = t - \tanh t$ とおく。すると $g(0) = 0$ であり、

$$g'(t) = 1 - \operatorname{sech}^2 t = \tanh^2 t > 0 \quad \text{ただし} t > 0,$$

であるから、g は狭義単調増加（strictly increasing）であり、$t > 0$ で $\tanh t < t$ が成り立つ。$t = y/2$ とすると

$$\tanh(y/2) < \tfrac{1}{2}y < y \qquad (y > 0).$$

次に $x > 1$ とし、$y = \operatorname{arcosh} x$ とおく。すると $y > 0$、$\cosh y = x$、$\sinh y = +\sqrt{x^2 - 1}$ である（$y > 0$ より正）。$\sinh y = 2 \sinh \frac{y}{2} \cosh \frac{y}{2}$ と $1 + \cosh y = 2\cosh^2 \frac{y}{2}$ を用いると

$$\tanh \frac{y}{2} = \frac{\sinh y}{1 + \cosh y} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1} = \frac{x^2 - 1}{(x+1)\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

したがって $y > \tanh(y/2)$ は

$$\operatorname{arcosh} x > \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad (x > 1),$$

となり、これが $(*)$ である。

小問 (ii)

$x > 1$ を固定し、t を変数として $(*)$ を区間 $[1, x]$ で積分する。

? **考えてみよう** $(*)$ の右辺は分母に $\sqrt{t^2 - 1}$ を含む。$t = 1$ から積分してよいのだろうか。また、積分しても不等式は**狭義**のまま保たれるのだろうか。

どちらも問題ない。$t > 1$ のとき $\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}} = \sqrt{\dfrac{t-1}{t+1}}$ であり、これは $t \to 1$ で 0 に収束（converge）するので、両辺とも $[1, x]$ で連続である。両辺の差は連続で、$(1, x]$ で正であるから、その $[1, x]$ 上の積分は正である。

左辺は、$u = \operatorname{arcosh} t$ として部分積分（integration by parts）を行うと

$$\int_1^x \operatorname{arcosh} t \, \mathrm{d}t = \Big[t \operatorname{arcosh} t \Big]_1^x - \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \, \mathrm{d}t = x\,A(x) - S(x),$$

となる。ここで $\operatorname{arcosh} 1 = 0$、$\sqrt{1^2-1} = 0$ を用いた。

右辺は 2 つの基本的な積分に分かれる。

$$\int_1^x \frac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = S(x) - A(x).$$

したがって

$$x\,A(x) - S(x) > S(x) - A(x) \quad \Longrightarrow \quad (x+1)A(x) > 2S(x).$$

$x+1>0$ で割り、小問 (i) と同様に整理すると

$$\operatorname{arcosh} x > \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x+1} = 2\,\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x>1),$$

となり、求める結果が得られる。これはちょうど $(*)$ の下界の 2 倍である。

小問 (iii)

小問 (ii) は、$t>1$ に対して $\operatorname{arcosh} t > 2\cdot\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}$ であることを述べている。右辺は $(*)$ と同じものの 2 倍である。そこで同じからくりをもう一度回す。先ほどと同じ理由づけで $[1,x]$ 上で積分し、すでに求めた 2 つの積分を用いると

$$x\,A(x) - S(x) > 2\big(S(x) - A(x)\big) \quad \Longrightarrow \quad (x+2)A(x) > 3S(x).$$

$x+2>0$ であるから

$$\operatorname{arcosh} x > 3\,\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+2} \qquad (x>1),$$

となり、これが求める結果である。

考えてみよう なぜここで止めるのか。もう一度積分できないだろうか。

このからくりが働くには、右辺が積分のわかっている $\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-1}}$ の定数倍でなければならない。新しい下界 $3\sqrt{t^2-1}/(t+2)$ はその形ではないので、この手法はここで尽きる。

独立な確認として（「別解」として）、$f(x) = A(x) - 3S(x)/(x+2)$ とおく。すると $f(1)=0$ であり、商の微分法（quotient rule）により

$$f'(x) = \frac{(x+2)^2 - 3x(x+2) + 3(x^2-1)}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x-1)^2}{(x+2)^2\sqrt{x^2-1}} > 0 \quad (x>1),$$

であるから、f は狭義単調増加であり、$x>1$ で $f(x)>0$ となって、先ほどと同じ結論を得る。

検算

$x = 2$ のとき、$\operatorname{arcosh} 2 = \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1.3170$ であり、3 つの下界はそれぞれ $1/\sqrt{3} \approx 0.577$、$2/\sqrt{3} \approx 1.155$、$3\sqrt{3}/4 \approx 1.299$ である。各下界は前のものより良く、いずれも 1.3170 より小さい。$x = 1$ の近くでは下界は非常に良くなる。$x = 1.001$ のとき $\operatorname{arcosh} x \approx 0.04471763$ であり、(ii) の下界との差は約 7×10^{-6}、(iii) の下界との差はわずか約 10^{-9} である。これは、各下界が $x - 1$ についてより高次まで $\operatorname{arcosh} x$ と一致するからである。2 つの積分の数値的検証（$x = 1.5$、2、5 における中点則（midpoint rule）による数値積分）と、10 000 個のランダムな $x > 1$ における 3 つの不等式すべての数値的検証では、食い違いは見つからなかった。

よくある間違い

- 符号を確定させずに $\sinh(\operatorname{arcosh} x) = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ とすること。$\operatorname{arcosh} x > 0$ であるから正の根をとる。
- 1 ではなく 0 から積分すること。arcosh は $x \geq 1$ でしか定義されず、下端を 1 にすることで境界項が消えるのである。
- 積分した不等式がなぜ依然として狭義であるのかを述べ忘れること。

STEP のその先へ

下界が良くなっていくのは、積分のたびに誤差が $x = 1$ で 1 次ずつ高い位数で消えるようになるからである。これは、次第に精度の上がる有理式型の近似の列の始まりであり、パデ（Padé）近似（Padé approximant）の近い親戚である。全体を通して用いた原理（$f(a) = 0$ かつ $f' > 0$ ならば、あるいはその積分形が成り立てば、$f > 0$）は、姿を変えた平均値の定理（mean value theorem）であり、解析学の非常に多くの部分の土台となっている。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は、平均値の定理と積分を厳密に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。