解答例

STEP III 2008、第 3 問

純粋数学 • 楕円の接線と焦点

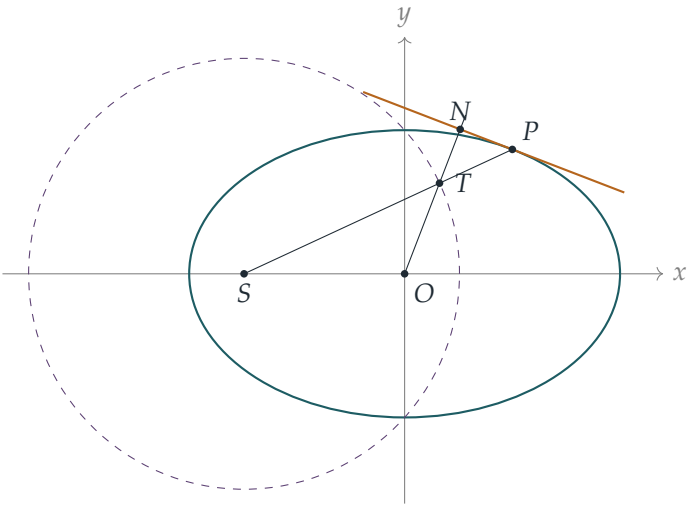
> **STEP III 2008、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q3

鍵となる考え方

この問題で扱うのはすべて 2 本の直線なので、それらの方程式をすっきりと書き下し、交点を求めればよい。直線 ON は接線（tangent）に垂直なので、その方向は接線の法線ベクトル（normal vector）であり、これは接線の方程式からそのまま読み取れる。SP を S を起点として媒介変数表示（parametrisation）すると、交点の計算は 1 行で済む。しかも、求めた媒介変数の値こそが円について必要な量そのものであることがわかる。すなわち、それは点 T が SP 上のどれだけの割合の位置にあるかを表している。

解答

以下では常に $0 < e < 1$ である。実際、$e^2 = 1 - b^2/a^2$ であり、$a > b > 0$ よりこれは 0 と 1 の間に厳密に収まる。また $\sin\theta \neq 0$ とする。$\sin\theta = 0$ ならば $P = (\pm a, 0)$ であり、接線は $x = \pm a$、$N = P$ となって、ON と SP はともに x 軸になるので、T は定まらない。



（図は $a=3$、$b=2$、$\theta=60^\circ$ の場合である。楕円（ellipse）は青緑色、P における接線は琥珀色で描かれ、破線の円は中心 S、半径 a の円である。）

T の y 座標

$x^2/a^2+y^2/b^2=1$ を陰関数微分（implicit differentiation）するか、よく知られた結果を用いれば、(x_1,y_1) における接線は $xx_1/a^2+yy_1/b^2=1$ である。P においては

$$\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1.$$

直線 $px+qy=1$ の法線ベクトルは (p,q) なので、接線の法線ベクトルは $(\frac{\cos\theta}{a},\frac{\sin\theta}{b})$、あるいは ab 倍して $(b\cos\theta, a\sin\theta)$ である。直線 ON は O を通りこの方向をもつ（接線に垂直だからである）ので、その上の点は $\mu(b\cos\theta,a\sin\theta)$ と表され、方程式は

$$a\sin\theta\, x=b\cos\theta\, y. \tag{1}$$

次に、SP を S を起点として媒介変数表示する。その上の点は

$$(-ea+\lambda a(\cos\theta+e),\ \lambda b\sin\theta),$$

であり、$\lambda=0$ のとき S、$\lambda=1$ のとき P である。これを (1) に代入し、因子 $\sin\theta\neq0$ で割ると

$$a(-ea+\lambda a(\cos\theta+e))=\lambda b^2\cos\theta$$
$$\lambda(a^2\cos\theta+a^2e-b^2\cos\theta)=ea^2.$$

ここで焦点（focus）の条件が効いてくる。$a^2-b^2=a^2e^2$ なので、括弧の中は $a^2e^2\cos\theta+a^2e=a^2e(1+e\cos\theta)$ となる。$a^2e\neq0$ で割って

$$\lambda=\frac{1}{1+e\cos\theta},$$

を得る。$1+e\cos\theta \geq 1-e > 0$ なので、この割り算は正当である。したがって T の y 座標は

$$y_T = \lambda b\sin\theta = \frac{b\sin\theta}{1+e\cos\theta},$$

となり、示すべき式が得られた。（後で使うために記しておくと、(1) から $x_T = \dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}y_T = \dfrac{a(1-e^2)\cos\theta}{1+e\cos\theta}$ である。）

T は中心 S、半径 a の円上にある

考えてみよう 線分 ST が SP のどれだけの割合であるかはわかっている。ほかに何が必要だろうか。

$T = S+\lambda(P-S)$ かつ $\lambda > 0$ なので、$ST = \lambda SP$ である。よって必要なのは長さ SP、すなわち P の焦点半径（focal distance）だけである。

$$\begin{aligned} SP^2 &= (a\cos\theta+ea)^2 + b^2\sin^2\theta \\ &= a^2[\cos^2\theta + 2e\cos\theta + e^2 + (1-e^2)\sin^2\theta] \\ &= a^2[(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + 2e\cos\theta + e^2(1-\sin^2\theta)] \\ &= a^2[1+2e\cos\theta+e^2\cos^2\theta] = a^2(1+e\cos\theta)^2, \end{aligned}$$

ここで 2 行目では $b^2 = a^2(1-e^2)$ を用いた。$a > 0$ かつ $1+e\cos\theta > 0$ なので、$SP = a(1+e\cos\theta)$ を得る。よって

$$ST = \lambda SP = \frac{a(1+e\cos\theta)}{1+e\cos\theta} = a,$$

となり、T は中心 S、半径 a の円上にある。

（座標から直接計算したい場合は次のようにする。$x_T + ea = \dfrac{a(\cos\theta+e)}{1+e\cos\theta}$ であり、$(x_T+ea)^2 + y_T^2$ は上の SP^2 とまったく同じ計算で a^2 に帰着する。）

検算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $P = (0,b)$ であり、接線は $y = b$ なので ON は y 軸となり、$T = (0, y_T)$ で、公式から $y_T = b$ である。このとき $ST^2 = e^2a^2 + b^2 = a^2$ となり、確かに成り立っている。
- $a = 3$、$b = 2$、$\theta = 60°$（図の場合）として 2 直線の交点を数値的に求めると $T \approx (0.4857, 1.2618)$ となる。公式からは $y_T = \sqrt{3}/(1+\sqrt{5}/6) \approx 1.2618$ であり、$ST \approx 3.0000$ である。

- 円の極限 $e \to 0$ では $S \to O$、$T \to P$ となり、P は確かに O を中心とする半径 a の円上にある。

よくある間違い

- ON を接線に垂直ではなく平行にとってしまう。ON の方向は法線 $(b\cos\theta, a\sin\theta)$ であり、$(-a\sin\theta, b\cos\theta)$ ではない。
- $a^2 - b^2$ を a^2e^2 に置き換えるのを忘れ、λ の式が簡単にならないまま残ってしまう。
- 断りなしに $\sin\theta$ で割ってしまう。$\sin\theta = 0$ の場合は実際に議論が破綻する。

STEP のその先へ

結果 $SP = a(1 + e\cos\theta) = a + ex_P$ は、姿を変えた焦点・準線の性質である。すなわち、焦点までの距離は準線（directrix）$x = -a/e$ までの距離の e 倍に等しい。円錐曲線（conic）を焦点を原点とする極座標（polar coordinates）で $r = \ell/(1 + e\cos\phi)$ と書くことは、大学 1 年次の力学でケプラー（Kepler）軌道を記述する方法であり、ここでも同じ分母 $1 + e\cos\theta$ が現れた。円錐曲線の幾何や、STEP 風の問題をさらに多く知りたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を、軌道については Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。