解答例

STEP III 2008、第 2 問

純粋数学 • 累乗の和

> **STEP III 2008、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q2

鍵となる考え方

$(r+1)^k - r^k$ の和は隣り合う項が打ち消し合う（telescoping）ので、ただ一つの項にまで縮む。一方で、各括弧を二項定理（binomial theorem）で展開することもでき、そうすると同じ和がより低い次数の累乗和（power sum）$S_j(n)$ の一次結合になる。この二つを等しいとおくと、それ以前のものから各 S_{k-1} を組み立てる漸化式（recurrence）が得られ、その漸化式こそが小問 (ii) の多項式としての構造を見るのに必要なものでもある。

解答

小問 (i)

まず、打ち消し合いを確かめる。和を書き下すと

$$\sum_{r=0}^{n}\left[(r+1)^k - r^k\right] = (1^k - 0^k) + (2^k - 1^k) + \cdots + ((n+1)^k - n^k) = (n+1)^k,$$

となる。途中の項はすべて打ち消し合い、また（$k \geq 1$ なので）$0^k = 0$ だからである。

次に、二項定理を用いる。各 r について

$$(r+1)^k - r^k = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}r^j = 1 + \binom{k}{1}r + \binom{k}{2}r^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}r^{k-1},$$

が成り立つ。r^k の項が打ち消し合うからである。これを $r = 0, 1, \ldots, n$ について足し合わせると、定数 1 は（r の値は $n+1$ 個あるので）$n+1$ を与え、$j \geq 1$ である各 r^j は

$S_j(n)$ を与える。したがって

$$(n+1)^k = (n+1) + \binom{k}{1}S_1(n) + \binom{k}{2}S_2(n) + \cdots + \binom{k}{k-2}S_{k-2}(n) + \binom{k}{k-1}S_{k-1}(n).$$

最後の係数は $\binom{k}{k-1} = k$ である。それ以外については対称性 $\binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}$ を用いると、$S_{k-j}(n)$ の係数は $\binom{k}{k-j} = \binom{k}{j}$ となる。特に $S_1(n)$ の係数は $\binom{k}{1} = \binom{k}{k-1}$ である。$kS_{k-1}(n)$ を一方の辺に残し、他のすべてを移項すると

$$kS_{k-1}(n) = (n+1)^k - (n+1) - \binom{k}{2}S_{k-2}(n) - \binom{k}{3}S_{k-3}(n) - \cdots - \binom{k}{k-1}S_1(n),$$

となり、これが求める $(*)$ である。（ここで S_{k-1} が考えている和の一つであるためには $k \geq 2$ が必要である。）

考えてみよう なぜ $j = 0$ の項を $S_0(n)$ と書かずに、別に扱ったのだろうか。

S_k は正の k に対してしか定義されておらず、また $r = 0$ における「0^0」は意味があいまいである。定数を外に出して直接 $n+1$ と数えれば、この二つの問題をともに避けられ、$(*)$ にただ一つ現れる $-(n+1)$ の理由も説明できる。

$S_3(n)$。 $(*)$ で $k = 4$ とおくと、$\binom{4}{2} = 6$、$\binom{4}{3} = 4$ であるから

$$\begin{aligned} 4S_3(n) &= (n+1)^4 - (n+1) - 6S_2(n) - 4S_1(n) \\ &= (n+1)^4 - (n+1) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1). \end{aligned}$$

どの項も因数 $n+1$ をもつので

$$\begin{aligned} 4S_3(n) &= (n+1)\left[(n+1)^3 - 1 - n(2n+1) - 2n\right] \\ &= (n+1)\left[n^3 + 3n^2 + 3n - 2n^2 - n - 2n\right] \\ &= (n+1)(n^3 + n^2) = n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

よって

$$S_3(n) = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \big(S_1(n)\big)^2.$$

$S_4(n)$。 $k = 5$ とおくと、$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$、$\binom{5}{4} = 5$ であるから

$$5S_4(n) = (n+1)^5 - (n+1) - 10S_3(n) - 10S_2(n) - 5S_1(n).$$

ここでも S_3、S_2、S_1 の式を用いて因数 $n+1$ をくくり出す。

$$\begin{aligned}5S_4(n) &= (n+1)\left[(n+1)^4 - 1 - \tfrac{5}{2}n^2(n+1) - \tfrac{5}{3}n(2n+1) - \tfrac{5}{2}n\right]\\ &= (n+1)\Big[n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \tfrac{5}{2}n^3 - \tfrac{5}{2}n^2\\ &\qquad - \tfrac{10}{3}n^2 - \tfrac{5}{3}n - \tfrac{5}{2}n\Big]\\ &= (n+1)\left[n^4 + \tfrac{3}{2}n^3 + \tfrac{1}{6}n^2 - \tfrac{1}{6}n\right]\\ &= \tfrac{1}{6}n(n+1)\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right).\end{aligned}$$

S_4 も S_2 と同様に因数 $2n+1$ をもつはずなので、3 次式に $n = -\frac{1}{2}$ を代入してみると $-\frac{3}{4} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - 1 = 0$ となる。よって $2n+1$ は因数であり、$6n^3 + 9n^2 + n - 1 = (2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$ である。したがって

$$S_4(n) = \tfrac{1}{30}\, n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

小問 (ii)

k についての強い数学的帰納法（strong induction）を用いる。$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ は次数（degree）2 であるから、主張は $k = 1$ のとき（さらに $k = 2$ のときも）成り立つ。

ある $k \geq 2$ について、$S_1(n), \ldots, S_{k-1}(n)$ のそれぞれが n の多項式（polynomial）であり、S_j の次数が $j+1$ であると仮定する。$(*)$ を k の代わりに $k+1$ として適用すると

$$(k+1)\,S_k(n) = (n+1)^{k+1} - (n+1) - \binom{k+1}{2} S_{k-1}(n) - \cdots - \binom{k+1}{k} S_1(n).$$

右辺について：

- $(n+1)^{k+1}$ は最高次の係数（leading coefficient）が 1 の $k+1$ 次多項式である。
- $n+1$ の次数は 1 である。
- $1 \leq j \leq k-1$ である各 $S_j(n)$ は、仮定により $j+1 \leq k$ 次の多項式である。

したがって右辺は多項式であり、その n^{k+1} の項は $(n+1)^{k+1}$ からしか生じないので打ち消されることはない。$k+1 \neq 0$ で割ると、$S_k(n)$ はちょうど $k+1$ 次の多項式（最高次の係数は $\frac{1}{k+1}$）である。以上で帰納法が完結する。

> **考えてみよう** 多項式 $P(n)$ の「定数項」と「係数の和」は、それぞれ何に対応するだろうか。

それぞれ $P(0)$ と $P(1)$ である。$S_k(n) = P(n) = a_{k+1}n^{k+1} + \cdots + a_1 n + a_0$ と書く。これは $n \geq 0$ であるすべての整数 n について和 $\sum_{r=0}^{n} r^k$ と一致するので、$n = 0$ と $n = 1$ で値を求めてよい。

- 定数項（constant term）：$k \geq 1$ より $a_0 = P(0) = S_k(0) = 0^k = 0$。
- 係数の和：$a_{k+1} + \cdots + a_1 + a_0 = P(1) = S_k(1) = 0^k + 1^k = 1$。

以上で両方の結果が示された。

検算

- 小さな値：$S_3(3) = 1 + 8 + 27 = 36 = \frac{1}{4} \cdot 9 \cdot 16$、また $S_4(3) = 1 + 16 + 81 = 98 = \frac{1}{30} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 35$。
- 得られた答えに小問 (ii) を当てはめる：$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$ の定数項は 0、係数の和は $\frac{6+15+10-1}{30} = 1$ であり、最高次の係数は帰納法の予測どおり $\frac{1}{5} = \frac{1}{k+1}$ である。
- 直接和をとることにより、$2 \leq k \leq 9$ かつ $0 \leq n \leq 30$ について $(*)$ を正確に確かめ、$0 \leq n < 200$ について二つの閉じた式をともに確かめた。

よくある間違い

- $\sum 1$ の $r = 0$ の項を忘れること。これは n ではなく $n+1$ を与える。
- 先に共通因数 $n+1$ をくくり出さずにすべてを展開してしまうこと。そうすると S_4 の計算がずっと重くなる。
- 小問 (ii) で、次数が「高々 $k+1$」であるとしか述べないこと。問題はちょうど $k+1$ であることを求めているので、n^{k+1} の項が打ち消されないことに言及すること。

STEP のその先へ

これらの多項式の係数はベルヌーイ数（Bernoulli numbers）によって支配されており、ファウルハーバーの公式（Faulhaber's formula）は、$S_k(n)$ を n の累乗の一次結合として、その係数を二項係数とベルヌーイ数の積で表す。$S_k(n)$ が最高次の項 $\frac{n^{k+1}}{k+1}$ をもつ $k+1$ 次多項式であるという事実は、$\int_0^x t^k \, \mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}}{k+1}$ の離散版であり、この考え方は差分法（calculus of finite differences）において厳密に定式化される。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）に挑戦するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。