解答例

STEP III 2008、第 12 問

確率・統計 ・ 積率母関数

STEP III 2008、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s3-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.24 節「**中心極限定理**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/clt.html

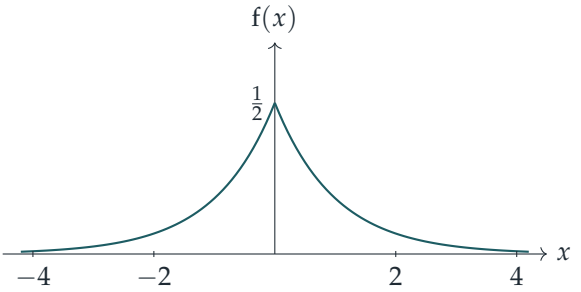
鍵となる考え方

確率密度関数（density）に含まれる絶対値（absolute value）によって、どの積分も $x < 0$ と $x > 0$ の二つに分かれ、それぞれは単純な指数関数の積分になる。その後は、積率母関数（moment generating function）に関する二つの事実だけで問題全体が進む。一つは、独立（independent）な確率変数の和の積率母関数はそれぞれの積率母関数の積になること、もう一つは $\mathrm{M}_{aY}(\theta) = \mathrm{M}_Y(a\theta)$ である。対数（logarithm）をとると n 乗が「n 倍の小さな量」に変わり、これはまさにマクローリン級数（Maclaurin series）が扱える形である。これは中心極限定理（central limit theorem）であり、すべての段階を手計算で実行できる場合に見ているのである。

解答

グラフの概形

この密度関数は偶関数であり、$x = 0$ で最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。そこでは鋭い角になっており（左微分係数と右微分係数はそれぞれ $+\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{2}$ である）、両側で指数関数的に 0 へ減衰する。



積率母関数

定義より $\mathrm{M}_X(\theta) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta X})$ である。0 で積分を分けると、

$$\begin{aligned}\mathrm{M}_X(\theta) &= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(1+\theta)x}\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(1-\theta)x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2(1+\theta)} + \frac{1}{2(1-\theta)} = \frac{(1-\theta)+(1+\theta)}{2(1-\theta^2)} = \frac{1}{1-\theta^2}.\end{aligned}$$

第 1 の積分は $1+\theta > 0$ のときに限り、第 2 の積分は $1-\theta > 0$ のときに限り収束する。したがってこの式は $-1 < \theta < 1$ で成り立ち、$\theta = 0$ の近くで必要なのはこれだけである。以上で求める結果が得られた。

分散（variance）を求めるため、$|\theta| < 1$ において等比級数（geometric series）として展開する：

$$\mathrm{M}_X(\theta) = 1 + \theta^2 + \theta^4 + \cdots.$$

これを $\mathrm{M}_X(\theta) = 1 + \mathrm{E}(X)\,\theta + \frac{1}{2}\mathrm{E}(X^2)\,\theta^2 + \cdots$ と比較すると、$\mathrm{E}(X) = 0$ および $\frac{1}{2}\mathrm{E}(X^2) = 1$ を得る。よって

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = 2.$$

（2 回微分して $\theta = 0$ とおいても同じ結果が得られるが、級数を使う方が速い。）

カエル：$Y/\sqrt{2n}$ の積率母関数

跳躍 $X_1, \ldots, X_n$ は独立であるから、$\mathrm{e}^{\theta X_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\theta X_n}$ も独立であり、したがってそれらの積の期待値（expectation）は期待値の積に等しい：

$$\mathrm{M}_Y(\theta) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{\theta X_1}\cdots\mathrm{e}^{\theta X_n}\big) = \prod_{i=1}^{n}\mathrm{M}_{X_i}(\theta) = (1-\theta^2)^{-n}.$$

$Z = Y/\sqrt{2n}$ とおくと、$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\theta Z}) = \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{(\theta/\sqrt{2n})Y}\big) = \mathrm{M}_Y\big(\theta/\sqrt{2n}\big)$ であるから、

$$\mathrm{M}_Z(\theta) = \left(1 - \frac{\theta^2}{2n}\right)^{-n}, \qquad |\theta| < \sqrt{2n}.$$

$\sqrt{2n}$ で割るのは自然なことである。$\mathrm{Var}(Y) = 2n$ なので、Z は平均 0、分散 1 をもつ。

極限

θ を固定する。$n > \frac{1}{2}\theta^2$ となれば $0 \le \theta^2/(2n) < 1$ であるから、対数をとって、$|u| < 1$ に対する $\ln(1-u) = -u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}u^3 - \cdots$ を用いることができる：

$$\begin{aligned}\ln \mathrm{M}_Z(\theta) &= -n\ln\left(1 - \frac{\theta^2}{2n}\right) = n\left(\frac{\theta^2}{2n} + \frac{\theta^4}{8n^2} + \frac{\theta^6}{24n^3} + \cdots\right)\\ &= \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{8n} + \frac{\theta^6}{24n^2} + \cdots.\end{aligned}$$

考えてみよう この級数の残りの部分が $n \to \infty$ のとき本当に消えることは、どうすればわかるだろうか？

$u = \theta^2/(2n)$ とおくと、初項より後の部分はすべて合わせて $n\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \cdots\right) \le n \cdot \frac{1}{2}u^2(1 + u + u^2 + \cdots) = \dfrac{nu^2}{2(1-u)} = \dfrac{\theta^4}{8n(1-u)}$ であり、$u \to 0$ よりこれは 0 に収束する。よって $\ln \mathrm{M}_Z(\theta) \to \frac{1}{2}\theta^2$ であり、exp は連続であるから、

$$\mathrm{M}_{Y/\sqrt{2n}}(\theta) \to \exp\left(\tfrac{1}{2}\theta^2\right) \quad \text{ただし} n \to \infty,$$

となり、求める結果が示された。

跳躍の最小回数

この極限は標準正規分布（standard Normal）の積率母関数であるから、n が大きいとき $Z = Y/\sqrt{2n}$ は近似的に $\mathrm{N}(0,1)$ に従うとみなす。「出発点から 25 cm 以上離れた位置に着地する」とは、どちらの向きであれ $|Y| \ge 25$ となることであるから、

$$\mathrm{P}(|Y| \ge 25) = \mathrm{P}\left(|Z| \ge \frac{25}{\sqrt{2n}}\right) \approx 2\left(1 - \Phi\left(\frac{25}{\sqrt{2n}}\right)\right).$$

この確率は n とともに増加する（カエルはより遠くまで散らばる）ので、これが 5% に達する最小の n を求めればよい。$\Phi(1.96) = 0.975$ であるから、

$$\frac{25}{\sqrt{2n}} \le 1.96 \iff 2n \ge \left(\frac{25}{1.96}\right)^2 \approx 162.7 \iff n \ge 81.3.$$

が必要である。したがって跳躍の最小回数は $n = 82$ である。（$n = 81$ のとき近似確率は約 4.95%、$n = 82$ のときは約 5.09% である。）

検算

- $\mathrm{M}_X(0) = 1$ であり、これはどの積率母関数でも成り立つべきことである。また M_X は偶関数であり、グラフの概形の対称性と一致する。

- $\int x^2 \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ の数値積分（numerical quadrature）は 2.0000 を与え、$\int \mathrm{e}^{0.3x}\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ の数値積分は $1.0989 = 1/0.91$ を与える。
- $\theta = 1$ のとき、$(1 - \frac{1}{2n})^{-n}$ は $n = 10$ で 1.6702、$n = 100$ で 1.6508 であり、$\mathrm{e}^{1/2} = 1.6487$ に近づいている。
- 10^5 匹のカエルがそれぞれラプラス（Laplace）分布に従う跳躍を 82 回行うシミュレーションでは、約 5.1% が出発点から 25 cm 以上離れた位置で終わった。

よくある間違い

- 片側（one-tailed）の値 1.645 を使ってしまう。カエルはどちら側にも 25 cm 離れた位置に行き得るので、両側の裾を数えなければならない。
- $\mathrm{M}_{Y/\sqrt{2n}}(\theta) = \mathrm{M}_Y(\theta)/\sqrt{2n}$ と書いてしまう。確率変数を定数倍すると、その積率母関数の**引数**が定数倍されるのである。
- 81.3 を最も近い整数に丸めて $n = 81$ と答えてしまう。$n = 81$ では確率は 5% をわずかに下回る。

STEP のその先へ

ここで証明したのはラプラス分布に従う歩幅に対する中心極限定理であり、一般の場合の証明も同じ道筋をたどる。すなわち $\ln \mathrm{M}(\theta/\sqrt{n})$ を 2 次まで展開し、残りが消えることを示すのである。大学 1 年の講義では「連続性定理（continuity theorem）」に出会うだろう。これは、積率母関数（あるいは常に存在する特性関数（characteristic functions））の収束から確率の収束へ移ることを正当化する定理であり、ここでは信用して受け入れた段階である。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）はその両方を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。