解答例

STEP III 2008、第 11 問

力学 ・ 回転の力学

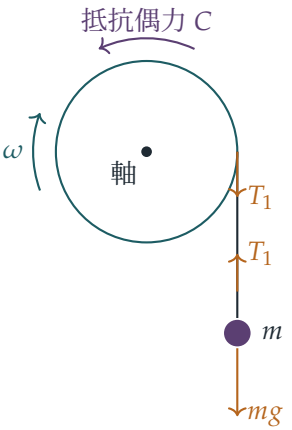
> **STEP III 2008、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q11

鍵となる考え方

偶力（couple）が一定であれば角減速度（angular deceleration）も一定である。したがって糸が外れた後、車輪は「suvat」の式の回転版に従い、最初の結果は「距離 = 平均の速さ × 時間」にすぎない。同じ段階から、抵抗偶力の大きさを I を用いて表すこともできる。下降の段階では、エネルギーの式を用いるのが自然である。各部分がどれだけ動くかはわかっており、一定の偶力に逆らってする仕事は単に偶力 × 角度だからである。

解答

モデル。車輪は固定された滑らかな軸のまわりを回転する剛体（rigid body）であり、大きさ C が一定の抵抗偶力だけが例外として働く。この偶力は運動の全過程（質点が下降している間も、その後も）を通じて働く。糸は軽く伸び縮みせず、滑らないので、糸がつながっている間は質点の速さは $v = r\omega$ である。ここで ω は車輪の角速度（angular speed）である。



糸は車輪の右側から垂れ下がっているので、質点が落下するにつれて車輪は時計回りに回転し、偶力 C は運動を妨げる向き、すなわち反時計回りに働く。（エネルギーを用いるので、実際には糸の張力（tension）T_1 は必要ない。）

糸が外れた後

このとき車輪に働く偶力は C だけなので、軸のまわりのモーメントを考えると

$$I\dot{\omega} = -C,$$

となり、角減速度 C/I は一定である。したがって角速度は時間 T の間に ω_0 から 0 まで**一次関数的に**減少するので、

$$\omega_0 = \frac{C}{I}\,T, \qquad \text{すなわち} \qquad C = \frac{I\omega_0}{T}. \tag{1}$$

角速度が一次関数的に減少するとき、平均の角速度は $\frac{1}{2}(\omega_0 + 0)$ であり、回転した角度は平均の角速度と時間の積である。その角度は n_2 回転、すなわち $2\pi n_2$ ラジアンなので、

$$\tfrac{1}{2}\omega_0 T = 2\pi n_2,$$

が成り立ち、これが最初の結果である。（これは $s = \frac{1}{2}(u+v)t$ の回転版である。）またこれより

$$\omega_0 = \frac{4\pi n_2}{T}, \qquad \text{よって (1) より} \qquad C = \frac{4\pi n_2 I}{T^2}. \tag{2}$$

質点が下降する間

車輪が n_1 回転、すなわち $2\pi n_1$ ラジアン回転する間に、糸は長さ $2\pi n_1 r$ だけほどけるので、質点は距離 $2\pi n_1 r$ だけ落下する。糸が外れる瞬間、車輪の角速度は ω_0 であり、糸は滑っていないので質点の速さは $r\omega_0$ である。

考えてみよう 抵抗があるのに、なぜここでエネルギーを用いることができるのだろうか？

エネルギーは保存されないが、仕事とエネルギーの原理（work–energy principle）は依然として成り立つ。すなわち、位置エネルギー（potential energy）の減少量は、運動エネルギー（kinetic energy）の増加量と抵抗に逆らってした仕事の和に等しい。一定の偶力 C に逆らって角度 θ だけ回転するときにする仕事は $C\theta$ である。これは一定の力に逆らってする仕事が力 $\times$ 距離であるのと同様である。糸は軽く伸び縮みせず滑らないので、張力が系全体にする仕事の総和は 0 である。糸が車輪にする仕事は、糸が質点から奪う仕事とちょうど等しいからである。

よって、放してから糸が外れるまでについて

$$mg\,(2\pi n_1 r) = \tfrac{1}{2}m(r\omega_0)^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_0^2 + C\,(2\pi n_1).$$

ここで (2) の ω_0 と C を代入すると

$$2\pi mgrn_1 = \tfrac{1}{2}\,(mr^2 + I)\,\frac{16\pi^2 n_2^2}{T^2} + 2\pi n_1 \cdot \frac{4\pi n_2 I}{T^2}.$$

両辺に $T^2/(2\pi)$ を掛けると

$$\begin{aligned} mgrn_1T^2 &= 4\pi n_2^2\,(mr^2 + I) + 4\pi n_1 n_2 I \\ &= 4\pi mr^2 n_2^2 + 4\pi n_2(n_1 + n_2)\,I. \end{aligned}$$

整理して、正の数 $4\pi n_2(n_1 + n_2)$ で割ると

$$I = \frac{mgrn_1T^2 - 4\pi mr^2 n_2^2}{4\pi n_2(n_1 + n_2)},$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

- **次元**（*dimensions*）。分子の二つの項 $mgrT^2$ と mr^2 はどちらも慣性モーメント（moment of inertia）の単位（$\mathrm{kg\,m^2}$）をもち、n_1、n_2 は無次元の数である。
- **数値による確認。** $I = 0.5\,\mathrm{kg\,m^2}$、$m = 1\,\mathrm{kg}$、$r = 0.2\,\mathrm{m}$、$C = 0.5\,\mathrm{N\,m}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$n_1 = 5$ として運動を数値的に追った。その結果、$\omega_0 \approx 13.03\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$、$T \approx 13.03\,\mathrm{s}$、$n_2 \approx 13.52$ が得られる。このとき $\frac{1}{2}\omega_0 T \approx 84.94 \approx 2\pi n_2$ であり、公式からは $I = 0.5000$ が得られる。
- **抵抗がない場合。** $C \to 0$ のとき車輪は止まらないので、T と n_2 はともに無限大になる。公式の分子は T^2 のように増大し、分母は $n_2^2 \propto T^2$ のように増大するので、公式は妥当なふるまいをする。

よくある間違い

- 下降中に抵抗に逆らってする仕事を入れ忘れる。問題文には偶力が一定であると書かれており、偶力は糸が外れた後だけでなく常に働いている。これを入れないと公式は誤ったものになる。上の例では、I は 0.5 ではなく $I \approx 0.39$ となってしまう。
- 質点の運動エネルギー $\frac{1}{2}mr^2\omega_0^2$ を忘れる。$-4\pi mr^2n_2^2$ の項はここから生じる。
- 回転数とラジアンを混同する。n 回転は $2\pi n$ ラジアンである。

STEP のその先へ

これは巧みな実験方法である。車輪が止まるまでの時間を測り、回転数を数えることで、慣性モーメントと軸受けの摩擦を、どちらも事前に知らなくても同時に測定できるのである。大学の力学では、これが剛体の回転の完全な理論へと発展する。そこでは角運動量（angular momentum）とトルク（torque）がそれぞれ運動量と力の役割を果たし、任意の軸のまわりに回転する物体に対しては慣性モーメントはテンソル（tensor）になる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）はこれを丁寧に展開しており、まさにこのような趣の問題を数多く収録している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。