解答例

STEP III 2008、第 10 問

力学 ・ 弾性ひもとエネルギー

> **STEP III 2008、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q10

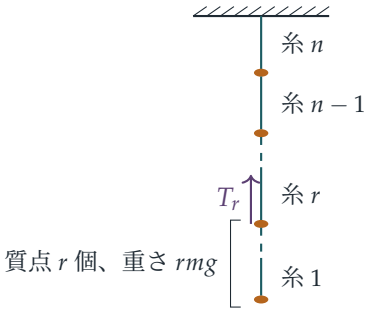
鍵となる考え方

短い糸はそれぞれ、その下にぶら下がっているものすべてを支えているので、その張力（tension）はすぐに書き下せる。そこでフックの法則（Hooke's law）を用いれば、伸び（extension）と蓄えられるエネルギーが求まり、それらの総和は r と r^2 の標準的な和になる。ロープも同じ状況で、質量が連続的に分布しているだけである。ロープを n 個の等しい部分に切り分け、各部分の質量をその下端にある質点とみなし、$n \to \infty$ とすればよい。和は積分になり、長さの式に現れる因子 $\frac{1}{2}$ は、ロープの各部分が平均してロープ全体の重さの半分を支えていることに由来する。

解答

質点をつないだ糸

短い糸はフックの法則に従う軽い弾性糸、おもりは質点としてモデル化する。問題文のとおり糸に下から番号をつけると、糸 r の下には r 個の質点がある。すなわち、糸 r 自身の質点と、糸 $1, \ldots, r-1$ の質点である。



系全体は静止している。糸 r の上端より下にあるもの、すなわち糸 r、糸 $1,\dots,r-1$ およびそれらについた r 個の質点をひとまとめにして考える。これにはたらく外力は、下向きの重力 rmg と、糸 r の上向きの張力 T_r だけである（糸は軽い）。よって

$$T_r = rmg.$$

フックの法則より、糸 r の伸びは

$$x_r = \frac{T_r\,\ell}{\lambda} = \frac{rmg\ell}{\lambda}.$$

したがって、長い糸の長さは

$$\sum_{r=1}^{n}(\ell + x_r) = n\ell + \frac{mg\ell}{\lambda}\sum_{r=1}^{n} r = n\ell + \frac{n(n+1)mg\ell}{2\lambda}.$$

自然長 (natural length) ℓ の糸を x だけ伸ばしたときの弾性エネルギー (elastic energy) は $\lambda x^2/(2\ell)$ である。糸 r については

$$\frac{\lambda}{2\ell}\left(\frac{rmg\ell}{\lambda}\right)^2 = \frac{r^2m^2g^2\ell}{2\lambda},$$

となり、$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ を用いると、弾性エネルギーの総和は

$$\frac{m^2g^2\ell}{2\lambda}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)\,m^2g^2\ell}{12\lambda}.$$

重いロープ

考えてみよう 質量が連続的に分布したロープについて、前半の結果はどのように役立つだろうか。

ロープを n 個の等しい部分に切り分ける。各部分の自然長は $\ell = L_0/n$、質量は $m = M/n$ であり、各部分の弾性率（modulus）はロープと同じ λ である（弾性率は部分の長さによらない）。各部分の質量をその下端に集中させると、ちょうど上で考えた長い糸が得られる。$n\to\infty$ とすると各部分は短くなり、質量を集中させたモデルは実際のロープに近づいていく。

長さの式に代入すると、

$$n\ell + \frac{n(n+1)mg\ell}{2\lambda} = L_0 + \frac{n(n+1)}{2\lambda}\cdot\frac{Mg}{n}\cdot\frac{L_0}{n} = L_0 + \frac{MgL_0}{2\lambda}\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow L_0\left(1+\frac{Mg}{2\lambda}\right)$$

$(n\to\infty)$。よって

$$L = L_0\left(1+\frac{Mg}{2\lambda}\right),$$

となり、示すべき式が得られた。

これは直接求めることもできる。ある点より下にあるロープの自然長を s とすると、その点が支える重さは Mgs/L_0 である。そこにある自然長 δs の微小部分の張力は $T = Mgs/L_0$ なので、その伸びは $T\,\delta s/\lambda$ である。これを足し合わせると

$$L - L_0 = \int_0^{L_0} \frac{Mgs}{\lambda L_0}\,\mathrm{d}s = \frac{MgL_0}{2\lambda}.$$

エネルギーについても、同様に代入すると

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{12\lambda}\cdot\frac{M^2g^2}{n^2}\cdot\frac{L_0}{n} = \frac{M^2g^2L_0}{12\lambda}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{M^2g^2L_0}{6\lambda}.$$

（直接求めるなら、微小部分が蓄えるエネルギーは $T^2\,\delta s/(2\lambda)$ であり、$\int_0^{L_0} \frac{M^2g^2s^2}{2\lambda L_0^2}\,\mathrm{d}s = \frac{M^2g^2L_0}{6\lambda}$ となる。）

これを L、L_0、λ で表すため、長さの式を用いて Mg を消去する。

$$L - L_0 = \frac{MgL_0}{2\lambda} \quad\Longrightarrow\quad Mg = \frac{2\lambda(L-L_0)}{L_0}.$$

したがって、ロープに蓄えられる弾性エネルギーは

$$\frac{L_0}{6\lambda}\cdot\frac{4\lambda^2(L-L_0)^2}{L_0^2} = \frac{2\lambda(L-L_0)^2}{3L_0}.$$

検算

- $n = 1$ のとき、前半の結果から長さは $\ell + mg\ell/\lambda$、エネルギーは $m^2g^2\ell/(2\lambda)$ となる。これは 1 本の糸が 1 個の質点を支える場合であり、正しい。
- 全体の伸びが同じ $e = L - L_0$ で、張力が**一様**なロープと比べてみる。このロープが蓄えるエネルギーは $\lambda e^2/(2L_0)$ である。今回の答えはその $\frac{4}{3}$ 倍であり、これはもっともらしい。伸びは上端付近に集中しており、エネルギーは局所的なひずみの 2 乗に比例して増えるからである。
- 数値で確かめる。$M = 3$、$L_0 = 2$、$\lambda = 50$、$g = 9.8$ とすると、公式からは $L = 2.588$、エネルギー 5.7624 が得られる。$n = 100\,000$ の離散的な鎖では 2.58801 と 5.76249 となり、また $2\lambda(L-L_0)^2/(3L_0) = 5.7624$ である。

よくある間違い

- 糸 r の張力を $(n-r+1)mg$ としてしまう。番号のつけ方では糸 n が最上部にあるので、糸 r が支える質点は r 個である。

- ロープの各部分の弾性率を λ/n としてしまう。弾性率は材質と断面で決まる量であり、長さにはよらない。変わるのはばね定数（stiffness）λ/ℓ のほうである。
- エネルギーを L、L_0、λ で表すよう求められているのに、M と g を含んだまま答えてしまう。

STEP のその先へ

n 個の集中質量から連続的なロープへ移行することは、連続体力学（continuum mechanics）の基本的な手法である。張力は関数 $T(s)$ となり、フックの法則は局所的な応力（stress）とひずみ（strain）の関係となり、エネルギーはエネルギー密度（energy density）の積分となる。同じ質点とばねの鎖を振動させると、その極限として弦の波動方程式（wave equation）が得られる。これらの考え方がどのように展開されるかを見るには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。