解答例

STEP III 2008、第 1 問

純粋数学 ・ 非線形連立方程式

> **STEP III 2008、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s3-q1

鍵となる考え方

$s_k = ax^k + by^k$ とおくと、与えられた方程式から s_0, s_1, s_2, s_3 がわかる。$p = x + y$、$q = xy$ とすると x と y は $t^2 - pt + q = 0$ の解であるから、冪和（power sums）は漸化式（recurrence）を満たす。すなわち、各 s_k は直前の項の p 倍から、さらにその前の項の q 倍を引いたものになる。ヒントにある「$x + y$ を掛ける」という操作が生み出すのは、まさにこの関係である。これにより、4 つの非線形な方程式が p と q についての 2 つの**線形**（linear）な方程式に変わる。その後は二次方程式から x と y が求まり、最初の 2 つの方程式から a と b が求まる。

解答

$k = 0, 1, 2, 3$ に対して $s_k = ax^k + by^k$ とおくと、$s_0 = 1$、$s_1 = \frac{1}{3}$、$s_2 = \frac{1}{5}$、$s_3 = \frac{1}{7}$ である。また $p = x + y$、$q = xy$ とおく。

冪和の漸化式

任意の a, b, x, y と任意の $k \geq 1$ に対して

$$(x + y)(ax^k + by^k) = ax^{k+1} + by^{k+1} + xy\,(ax^{k-1} + by^{k-1}),$$

が成り立つ。交差項が $axyx^{k-1}$ と $bxy\,y^{k-1}$ になるからである。ここでの記号を用いれば

$$s_{k+1} = p\,s_k - q\,s_{k-1}.$$

これは恒等式（identity）であるから、連立方程式の**すべての**解に対して成り立つ。

$x+y$ と xy を求める

$k=1$ と $k=2$ をとり、既知の値を代入すると

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{3}p - q,$$
$$\frac{1}{7} = \frac{1}{5}p - \frac{1}{3}q.$$

第 1 式より $q = \frac{1}{3}p - \frac{1}{5}$ である。これを第 2 式に代入すると

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{5}p - \frac{1}{9}p + \frac{1}{15} \quad \Longrightarrow \quad \frac{4}{45}p = \frac{1}{7} - \frac{1}{15} = \frac{8}{105} \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{6}{7},$$

となり、さらに $q = \frac{2}{7} - \frac{1}{5} = \frac{3}{35}$ を得る。この連立一次方程式の行列式（determinant）は 0 でないから、これらの値は一意に定まる。すなわち、**すべての**解において $x+y = \frac{6}{7}$ かつ $xy = \frac{3}{35}$ である。

x と y を求める

したがって x と y は

$$t^2 - \tfrac{6}{7}t + \tfrac{3}{35} = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad 35t^2 - 30t + 3 = 0,$$

の 2 つの解であり、

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{900-420}}{70} = \frac{30 \pm 4\sqrt{30}}{70} = \frac{15 \pm 2\sqrt{30}}{35}.$$

を得る。判別式（discriminant）は正であるから $x \neq y$ であり、$\{x, y\}$ はこの 2 数をどちらかの順に並べたものである。

考えてみよう x と y がわかれば、a と b は確かに定まるといえるだろうか？

いえる。x と y が既知であれば、最初の 2 つの方程式 $a+b=1$ と $ax+by=\frac{1}{3}$ は a と b についての線形な方程式であり、その行列式は $y-x$ である。$x \neq y$ よりこれは 0 でないから、組 (a,b) はちょうど 1 つ存在する。

a と b を求める

$x = \frac{15+2\sqrt{30}}{35}$、$y = \frac{15-2\sqrt{30}}{35}$ とすると、$x-y = \frac{4\sqrt{30}}{35}$ である。$a+b=1$ と $ax+by=\frac{1}{3}$ から b を消去すると $a(x-y) = \frac{1}{3} - y$ を得る。ここで

$$\frac{1}{3} - y = \frac{35 - 3(15-2\sqrt{30})}{105} = \frac{6\sqrt{30}-10}{105},$$

であるから

$$a = \frac{6\sqrt{30}-10}{105} \cdot \frac{35}{4\sqrt{30}} = \frac{6\sqrt{30}-10}{12\sqrt{30}} = \frac{1}{2} - \frac{5}{6\sqrt{30}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36},$$

となり、$b = 1 - a = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{30}}{36}$ である。

これらが実際に解であること

ここまでに示したのは、解があるとすれば必ずこの形になるということだけであるから、これが実際に解になっていることを確かめる必要がある。作り方から $s_0 = 1$ かつ $s_1 = \frac{1}{3}$ である。p と q は上の 2 つの線形な方程式を満たすから、漸化式より $s_2 = ps_1 - qs_0 = \frac{1}{5}$、さらに $s_3 = ps_2 - qs_1 = \frac{1}{7}$ が得られる。よって 4 つの方程式はすべて成り立つ。

x と y の役割を入れ替えると、a と b も入れ替わる。したがって解はちょうど 2 つであり、

$$(a, b, x, y) = \left(\frac{18 - \sqrt{30}}{36}, \frac{18 + \sqrt{30}}{36}, \frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}, \frac{15 - 2\sqrt{30}}{35} \right)$$

と、これを $a \leftrightarrow b$ と $x \leftrightarrow y$ を同時に入れ替えたものである。どちらの解においても、x, y のうち大きい方が小さい方の係数と組になっている。

検算

数値的には $x \approx 0.741556$、$y \approx 0.115587$、$a \approx 0.347855$、$b \approx 0.652145$ である。このとき $ax + by \approx 0.333333$、$ax^2 + by^2 \approx 0.200000$、$ax^3 + by^3 \approx 0.142857$ となり、計算機の精度の範囲で $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{7}$ と一致する。簡単な妥当性の確認として、x と y はともに $(0, 1)$ に属し、a と b はともに正である。これは右辺が $[0, 1]$ 上での t^{2k} の平均値であること（下記参照）と整合している。

よくある間違い

- x と y を求めたものの、組み合わせが重要であることを忘れる。a は x と組になっているので、a と b も入れ替えずに x と y だけを入れ替えることはできない。
- 必要条件（necessary conditions）を求めたところで終えてしまう。問題文は「すべて求めよ」といっているので、すべての解がこの形をもつことと、これらの値が実際に 4 つの方程式をすべて満たすことの両方を示す必要がある。

STEP のその先へ

数 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ は $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^{2k}\,\mathrm{d}t$ に等しい。したがってこの連立方程式は、7 次以下の多項式に対して厳密に成り立つ公式 $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f \approx \frac{a}{2}\big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\big) + \frac{b}{2}\big(f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\big)$

を求めていることになる。これは 4 点のガウス（*Gauss*）–ルジャンドル（*Legendre*）求積（Gauss–Legendre quadrature）であり、その節点は $\pm\sqrt{x}$ と $\pm\sqrt{y}$、そして $a \approx 0.3479$ と $b \approx 0.6521$ はよく知られたその重みである。ここで行ったように冪和から漸化式を見つけるという発想は、信号処理におけるプロニー法（Prony's method）の背後にある考え方でもある。さらに学ぶには、Süli and Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*（数値解析入門）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。