解答例

STEP II 2008、第 9 問

力学 ・ 放物運動

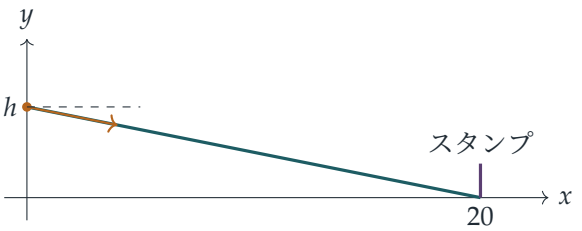
> **STEP II 2008、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q9

鍵となる考え方

水平方向の運動から、飛行時間が α を用いて定まる。その時間を鉛直方向の運動に代入すると、α と h を結ぶ一つの方程式が得られる。$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ と書き換えると、これは $\tan\alpha$ についての二次方程式（quadratic equation）になる。これは「どの角度なら標的に当たるか」という問題の定番の手法である。その後は、クリケットについての常識から適切な解を選び、小角近似（small-angle approximation）で仕上げる。

解答

ボールを、空気抵抗（air resistance）も回転もなく重力のみを受けて自由に運動する質点（particle）としてモデル化する。投げ出す点の真下の地面を原点とし、x をスタンプ（stumps）に向かう水平方向、y を鉛直上向きにとる。すると、ボールは $(0, h)$ から速さ $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、水平から上向きに角 α で投げ出される（α が負のときは下向きに投げられることを意味する）。



小問 (i)

水平方向には力がはたらかないので、$x = 40t\cos\alpha$ である。ボールが $x = 20$ に達するのは

$$t = \frac{20}{40\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

のときである。鉛直方向の加速度は $-10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ であるから、

$$y = h + 40t\sin\alpha - 5t^2.$$

この時刻にボールは地面の高さ $y = 0$ にあるので、

$$0 = h + 40\sin\alpha\cdot\frac{1}{2\cos\alpha} - \frac{5}{4\cos^2\alpha} = h + 20\tan\alpha - \tfrac{5}{4}\sec^2\alpha.$$

ここで $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ を用い、$T = \tan\alpha$ とおくと、

$$h + 20T - \tfrac{5}{4}(1 + T^2) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad 5T^2 - 80T + 5 - 4h = 0.$$

解の公式（quadratic formula）により、

$$T = \frac{80 \pm \sqrt{6400 - 20(5-4h)}}{10} = \frac{80 \pm \sqrt{6300 + 80h}}{10},$$

したがって、とりうる二つの値は

$$\tan\alpha = 8 \pm \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h}.$$

である。$h \geq 0$ であるから、どちらも実数である。

考えてみよう 速球投手（fast bowler）が実際に使うのはどちらの解だろうか？

$\sqrt{63} \approx 7.9$ であるから、大きい方の解では $\tan\alpha \approx 16$、すなわち $\alpha \approx 86°$ となる。これは約 80 m も上昇し、スタンプに落ちてくるまで約 8 s かかる、空高く上がる山なりの球である。速球投手の投球とはとても言えない。小さい方の解

$$\tan\alpha = 8 - \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h},$$

が適切な解である。現実的なリリースの高さ（2 メートル程度）では、$63 + \frac{4}{5}h$ は 64 に近いので、$\tan\alpha$ は 0 に近い。たとえば、0 から 3 までの任意の h に対して $|\tan\alpha| < 0.09$ となる。よって α は小さな角であり $\cos\alpha \approx 1$ であるから、スタンプに達するまでの時間は

$$t = \frac{1}{2\cos\alpha} \approx \tfrac{1}{2}\,\mathrm{s},$$

となり、示すべきことが示された。（実際には $t = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \tan^2\alpha}$ であり、$|\tan\alpha| < 0.1$ であれば常に $\frac{1}{2}$ との差は 0.5% 以内である。）

小問 (ii)

ボールが水平より下向きに投げ出されるのは、ちょうど $\tan\alpha < 0$ のときである。大きい方の解は常に正であるから、小さい方の解を用いる：

$$8 - \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h} < 0 \iff \sqrt{63 + \tfrac{4}{5}h} > 8 \iff 63 + \tfrac{4}{5}h > 64 \iff h > \tfrac{5}{4},$$

ここで、両辺が正なので 2 乗する操作は同値変形である。よって、投手がボールを水平より下向きに投げ出すのは $h > 1.25$ のときである。ちょうど $h = 1.25$ のときは、ボールは水平に投げ出される。

小問 (iii)

$h = 2.5$ のとき、小問 (ii) より α は小さな負の角である。$\cos\alpha \approx 1$ および（ラジアンで）$\sin\alpha \approx \alpha$ とすると、$\tan\alpha \approx \alpha$ かつ $\sec^2\alpha \approx 1$ となるので、小問 (i) の方程式 $0 = h + 20\tan\alpha - \frac{5}{4}\sec^2\alpha$ は

$$0 \approx 2.5 + 20\alpha - 1.25, \qquad \text{よって} \qquad \alpha \approx -\frac{1.25}{20} = -0.0625 \text{ rad}.$$

となる。度に換算すると、

$$\alpha \approx -0.0625 \times \frac{180}{\pi} \approx -3.58^\circ,$$

よって $\alpha \approx -3.6^\circ$ である。ボールは水平より約 3.6° 下向きにリリースされる。

別の見方もできる。二項近似（binomial approximation）を用いると、$\tan\alpha = 8 - \sqrt{65} = 8 - 8\sqrt{1 + \frac{1}{64}} \approx 8 - 8(1 + \frac{1}{128}) = -\frac{1}{16}$ となる。これからも同じ答えが得られる。

検算

- **厳密な値。** $\tan\alpha = 8 - \sqrt{65} = -0.06226$ より $\alpha = -3.563^\circ$ であり、有効数字 2 桁で -3.6° となって、近似と一致する。
- **シミュレーション。** $(0, 2.5)$ から $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、-3.563° で運動を数値的に刻んで追跡すると、ボールは 0.501 s 後に高さ 0.0000 m で $x = 20$ に達する。
- **境界。** $h = 1.25$ のとき、小さい方の解は $8 - \sqrt{64} = 0$ である。ボールは水平に投げ出され、0.5 秒の飛行の間に $5(0.5)^2 = 1.25\,\mathrm{m}$ 落下して、ちょうどスタンプの位置に着地する。

よくある間違い

- $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ を思い出さず、$\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ のまま別々に解こうとして、計算が煩雑になる。
- 角度をラジアンのまま答えたり、度のまま小角近似を使ったりする。$\sin\theta \approx \theta$ が成り立つのは θ がラジアンのときだけである。
- 小問 (iii) で負号を落とす。小問 (ii) が予測するとおり、角は水平より下向きである。

STEP のその先へ

解が二つある構造は、一定の速さで投げ出された物体は、その「包絡線（envelope）」（安全放物線（parabola of safety））の内側にある任意の点に二通りの軌道で到達できる、という一般的な事実の現れである。包絡線上では二つの軌道が一つに重なり、その外側の点にはまったく到達できない。実際のクリケットのボールは、空気抵抗や、回転によるマグヌス効果（Magnus effect）の影響も受ける。これらを考えると非線形微分方程式（nonlinear differential equation）が現れ、通常は数値的に解かなければならない。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物運動と抵抗を受ける運動を大学 1 年生のレベルで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。