解答例

STEP II 2008、第 8 問

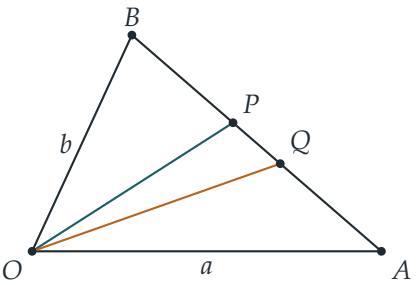
純粋数学 • ベクトルと角の二等分線

> **STEP II 2008、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q8

鍵となる考え方

$\angle AOB$ の二等分線（angle bisector）に沿ったベクトルは、OA と OB に沿った単位ベクトル（unit vector）の和である。長さの等しい 2 つのベクトルを加えるとひし形（rhombus）の対角線が得られ、ひし形の対角線はその角を二等分するからである。これを P の位置ベクトル（position vector）と比べることで λ が定まる。その後は、Q は P において A と B の役割を入れ替えたものにすぎず、最後の等式は内積（scalar product）を用いた直接的な計算であり、その計算の中で厄介な項 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ が打ち消し合う。

解答



図では $a > b$ であるから、P（二等分線上の点、青緑色）は B に近く、Q は B からの距離が P と A の距離に等しい点である。

P の位置ベクトル

$AP : PB = (1-\lambda) : \lambda$ であり、2 つの部分を合わせると AB になるから、$AP = (1-\lambda)AB$ である。よって $\overrightarrow{AP} = (1-\lambda)(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ であり、

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + (1-\lambda)(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b}.$$

（確認：比が示すとおり、$\lambda = 1$ のとき A、$\lambda = 0$ のとき B となる。）

λ を求める

ベクトル $\mathbf{a}/a$ と $\mathbf{b}/b$ は OA と OB に沿った単位ベクトルである。その和は OA と OB に沿った辺をもつひし形の対角線であるから、$\angle AOB$ の二等分線の方向を向く。P はこの二等分線上にあるので、あるスカラー k に対して

$$\lambda\mathbf{a} + (1-\lambda)\mathbf{b} = k\left(\frac{\mathbf{a}}{a} + \frac{\mathbf{b}}{b}\right)$$

が成り立つ。

? **考えてみよう** なぜ $\mathbf{a}$ の係数と $\mathbf{b}$ の係数を別々に比較してよいのだろうか。

O、A、B は同一直線上（collinear）にないから、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ はともに零ベクトルでなく、平行でもない。したがって $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は一次独立（linearly independent）である。すなわち、$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ならば $\alpha = \beta = 0$ である。よって

$$\lambda = \frac{k}{a}, \qquad 1-\lambda = \frac{k}{b}.$$

両辺を加えると $1 = k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ となるから、$k = \dfrac{ab}{a+b}$ であり、

$$\boxed{\lambda = \frac{b}{a+b}}, \qquad 1-\lambda = \frac{a}{a+b}.$$

これは形を変えた角の二等分線定理（angle bisector theorem）である：$AP : PB = (1-\lambda) : \lambda = a : b = OA : OB$。したがって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{b\,\mathbf{a} + a\,\mathbf{b}}{a+b}.$$

点 Q と等式

Q は AB 上にあって $BQ = AP = (1-\lambda)AB$ を満たすから、P のときと同じ議論を A からではなく B から測って行えば、

$$\overrightarrow{OQ} = \mathbf{b} + (1-\lambda)(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} = \frac{a\,\mathbf{a} + b\,\mathbf{b}}{a+b}.$$

$c = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ とおき、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = b^2$ を用いる。すると

$$(a+b)^2\,OQ^2 = (a\mathbf{a}+b\mathbf{b})\cdot(a\mathbf{a}+b\mathbf{b}) = a^2\cdot a^2 + 2ab\,c + b^2\cdot b^2 = a^4+b^4+2abc,$$
$$(a+b)^2\,OP^2 = (b\mathbf{a}+a\mathbf{b})\cdot(b\mathbf{a}+a\mathbf{b}) = b^2a^2 + 2ab\,c + a^2b^2 = 2a^2b^2+2abc.$$

辺々引くと、c を含む項が打ち消し合う：

$$(a+b)^2\left(OQ^2-OP^2\right) = a^4-2a^2b^2+b^4 = (a^2-b^2)^2 = (a-b)^2(a+b)^2.$$

$(a+b)^2 \neq 0$ で割ると

$$OQ^2-OP^2 = (a-b)^2 = (b-a)^2,$$

となり、示すべき式が得られた。

検算

$\mathbf{a}=(3,0)$、$\mathbf{b}=(0,4)$ とすると、$a=3$、$b=4$ であり、$\angle AOB$ は直角である。このとき $\lambda = \frac{4}{7}$ であり、$\overrightarrow{OP} = \left(\frac{12}{7},\frac{12}{7}\right)$ は直角の二等分線 $y=x$ 上にある。また $\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{9}{7},\frac{16}{7}\right)$ であるから、$OQ^2-OP^2 = \frac{337}{49}-\frac{288}{49} = 1 = (4-3)^2$ となる。$a=b$ のときは三角形は二等辺三角形（isosceles triangle）であり、$P=Q$ は AB の中点となって、差は当然 0 になる。2 次元および 3 次元の 20,000 個のランダムな三角形で数値的に検証したところ、すべての結果が誤差 10^{-13} 以内で一致した。

よくある間違い

- $\overrightarrow{OP} = (1-\lambda)\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ と書いてしまう。比のうち大きいほうの $1-\lambda$ は A からの距離であるから、これは $\mathbf{b}$ に掛かる。$\lambda=1$ で確かめるとよい。
- $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ を二等分線の方向として使ってしまう。これが正しいのは $a=b$ のときだけであり、単位ベクトルが必要である。
- $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2$ を a^2+b^2 と展開し、交差項 $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ を忘れる。ここではこの項は打ち消し合うが、それは両方の展開にこの項がきちんと書かれている場合に限る。

STEP のその先へ

最後の計算は、線形写像（linear map）のもとで長さがどのように変換されるかの特別な場合である。OP^2 と OQ^2 は二次形式（quadratic form）$\mathbf{x}\mapsto\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$ の値であり、交差項は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のグラム行列（Gram matrix）によって支配される。単位ベクトルを加え

ると二等分線が得られるという事実も一般化できる。任意の内積空間（inner-product space）において、正規化してから加えることが、2 つのベクトルの「中間」の方向を求める方法なのである。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、この精神で内積、長さ、角度を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。