解答例

STEP II 2008、第 7 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

STEP II 2008、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s2-q7

鍵となる考え方

左辺の $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ は $\ln y$ の導関数（derivative）であるから、この置換は対数（logarithm）をとって扱うのが最もよい。積 $y = u\,(1+x^2)^{1/2}$ は和に変わり、右辺の項 $\frac{x}{1+x^2}$ はちょうど $\ln(1+x^2)^{1/2}$ の導関数になっている。この項が打ち消し合い、u についての変数分離形（separable）の方程式が残る。小問 (ii) は立方根を用いた同じ考え方であり、二つの答えを並べてみれば (iii) のパターンは明らかである。

解答

小問 (i)

$x = 0$ で $y = 1 \neq 0$ であり、方程式には $1/y$ が含まれるので、$x = 0$ を含み $y \neq 0$ となる区間で考える。$(1+x^2)^{1/2} > 0$ であるから、置換によりそこでは $u \neq 0$ でもあり、$u(0) = 1$ である。

$|y| = |u|\,(1+x^2)^{1/2}$ の対数をとって微分すると、

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{x}{1+x^2}.$$

これを微分方程式（differential equation）と比べると、$\frac{x}{1+x^2}$ の項が打ち消し合い、

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = xy = x\,u\,(1+x^2)^{1/2}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x(1+x^2)^{1/2},$$

が残る。ここで u で割ったが、$u \neq 0$ であるからこれは許される。

考えてみよう $x(1+x^2)^{1/2}$ を手間をかけずに積分するにはどうすればよいか。

因数 x は $1+x^2$ の導関数の半分であるから、合成関数の微分法の逆（reverse chain rule）により $\int x(1+x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} = \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}$ に定数を加えたものとなる。（微分して確かめよ。）

両辺を x で積分すると、

$$-\frac{1}{u} = \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C.$$

$x=0$ で $u=1$ であるから、$-1 = \frac{1}{3} + C$ より $C = -\frac{4}{3}$ である。したがって

$$\frac{1}{u} = \frac{4-(1+x^2)^{3/2}}{3}, \qquad u = \frac{3}{4-(1+x^2)^{3/2}},$$

となり、ゆえに

$$\boxed{y = \frac{3\,(1+x^2)^{1/2}}{4-(1+x^2)^{3/2}}}$$

である。これは 0 を含み分母が正となる区間、すなわち $(1+x^2)^{3/2} < 4$、つまり $|x| < \sqrt{2^{4/3}-1} \approx 1.233$ で成り立つ。$|x|$ がこの値に近づくと $y \to \infty$ となる。

小問 (ii)

今度は余分な項が $\frac{x^2}{1+x^3}$ であり、これは $\frac{1}{3}\ln(1+x^3) = \ln(1+x^3)^{1/3}$ の導関数である。このことから、$x=0$ の近く（$1+x^3>0$ となるところ）で $y = u\,(1+x^3)^{1/3}$ とおけばよいとわかる。先ほどとまったく同様に、

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{x^2}{1+x^3},$$

であるから、方程式は

$$\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^2 y = x^2 u\,(1+x^3)^{1/3}, \qquad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^2(1+x^3)^{1/3}.$$

となる。今回は x^2 が $1+x^3$ の導関数の 3 分の 1 であるから、

$$-\frac{1}{u} = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{4}(1+x^3)^{4/3} + C = \tfrac{1}{4}(1+x^3)^{4/3} + C.$$

$x=0$ で $u=1$ であるから、$-1 = \frac{1}{4} + C$ より $C = -\frac{5}{4}$ である。よって $\frac{1}{u} = \frac{5-(1+x^3)^{4/3}}{4}$ であり、

$$\boxed{y = \frac{4\,(1+x^3)^{1/3}}{5-(1+x^3)^{4/3}}}$$

これは 0 の近くで $-1 < x < \left(5^{3/4}-1\right)^{1/3} \approx 1.33$ に対して成り立つ。

小問 (iii)

二つの答えを比べると、分子には根号 $(1+x^n)^{1/n}$、分母には累乗 $(1+x^n)^{(n+1)/n}$ が現れ、定数は $n+1$ と $n+2$ である。そこで次のように予想する。

$$\boxed{y=\frac{(n+1)\,(1+x^n)^{1/n}}{n+2-(1+x^n)^{(n+1)/n}}}$$

これは $n=2$ と $n=3$ のとき (i) と (ii) の答えを与える。（証明は求められていないが、同じ置換 $y=u(1+x^n)^{1/n}$ によって証明できる。$\int x^{n-1}(1+x^n)^{1/n}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}(1+x^n)^{(n+1)/n}$ であり、$x=0$ での条件から定数 $-\frac{n+2}{n+1}$ が得られる。）

検算

- $x=0$ では、どの式も要求どおり $\frac{n+1}{n+2-1}=1$ を与える。
- (i) の $x=0$ の近くでは、方程式から $y'(0)=0$ が得られ、実際 $(1+x^2)^{1/2}$ と $(1+x^2)^{3/2}$ はいずれも 0 で傾きが 0 である。
- 方程式を数値的に解く（$x=0$ からルンゲ＝クッタ（Runge–Kutta）法で進める）と、$n=2,3,4,5,7$ についていくつかの点で、公式と 10^{-8} より高い精度で一致する。たとえば (i) では $x=1$ で $y=\frac{3\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\approx 3.6213$、(ii) では $x=1$ で $y=\frac{4\cdot 2^{1/3}}{5-2^{4/3}}\approx 2.0320$ である。

よくある間違い

- $y=u(1+x^2)^{1/2}$ を代入して積の微分法（product rule）でそのまま微分すること。これでも解けるが、計算が煩雑になる。y で割る（同じことだが、対数をとる）と、打ち消し合いが一目でわかる。
- $\int u^{-2}\,\mathrm{d}u=-u^{-1}$ の負号を忘れること。これで定数が狂ってしまう。
- 定数を誤った段階で決めること。式を変形する前に $u(0)=1$ を適用せよ（u の方程式に $y(0)=1$ を用いるのではない）。

STEP のその先へ

この方程式は**ベルヌーイの微分方程式**（Bernoulli equation）$y'=P(x)y+Q(x)y^2$ であり、一般的な手法は置換 $v=1/y$ によって線形の方程式にすることである。ここでは問題で与えられた置換がその役割を二段階で果たしている。まず積分因子（integrating factor）に似た $(1+x^n)^{1/n}$ で P の項を取り除き、次に変数を分離するのである。また、

方程式は一見無害に見えるのに、解は有限の x で発散することにも注意しよう。この「有限時間爆発」（finite-time blow-up）は y^2 の項をもつ方程式に典型的な現象であり、常微分方程式（ODE）の最初の講義で学ぶ。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、ベルヌーイの微分方程式と解の存在が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。