解答例

STEP II 2008、第 6 問

純粋数学 • 和積の公式

> **STEP II 2008、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q6

鍵となる考え方

偏角の異なる余弦と正弦の和は扱いにくいが、2 つの余弦の和は和積の公式（sum-to-product formula）によって積に因数分解できる。まず正弦を余弦に書き直す。そうすれば f の零点（zero）は 2 つの単純な因数の零点となり、**両方**の因数が同時に 0 になる点で曲線は軸に接する。最後の小問では、余弦も正弦もそれぞれ高々 1 であることを思い出せばよい。

解答

以下を通して、

$$A = 2x + \frac{\pi}{3}, \qquad \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos B, \quad \text{ただし} B = \frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{2},$$

と書く。すると $f(x) = \cos A + \cos B$ である。

小問 (i)

項 $\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ の周期（period）は π であり、$\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4})$ の周期は $\frac{2\pi}{3/2} = \frac{4\pi}{3}$ である。共通の周期はそれぞれの周期の整数倍でなければならない。$p\pi = q \cdot \frac{4\pi}{3}$ は $3p = 4q$ を意味し、最小の正の解は $p = 4$、$q = 3$ である。よってすべての x について $f(x + 4\pi) = f(x)$ であり、f の周期は

$$4\pi.$$

である。これより小さい周期は存在しない。小問 (iii) で見るように、$f(x) = 2$ となるのは整数 t を用いて $x = \frac{11\pi}{6} + 4t\pi$ と表されるときに限るので、f が最大値をとる点は 4π 間隔で並び、どの周期も 4π の倍数でなければならないからである。

小問 (ii)

$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ を用いる。ここで

$$\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{13\pi}{12}\right) = \frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24},$$
$$\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{7x}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24},$$

であるから、

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24}\right).$$

を得る。したがって $f(x) = 0$ となるのは、2 つの余弦のいずれかが 0 になるときに限る。

第 1 の因数。 $\frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ より $x = -\frac{\pi}{6} + 4k\pi$ である。$[-\pi, \pi]$ に含まれるのは $x = -\frac{\pi}{6}$ のみである。

第 2 の因数。 $\frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ より $\frac{7x}{4} = \frac{17\pi}{24} + k\pi$ であるから、

$$x = \frac{(17 + 24k)\pi}{42}.$$

となる。$-42 \le 17 + 24k \le 42$ が必要なので $k = -2, -1, 0, 1$ であり、$x = -\frac{31\pi}{42}, -\frac{7\pi}{42} = -\frac{\pi}{6}, \frac{17\pi}{42}, \frac{41\pi}{42}$ を得る。

以上を合わせると、$-\pi \le x \le \pi$ における f の零点は

$$x = -\frac{31\pi}{42}, \quad -\frac{\pi}{6}, \quad \frac{17\pi}{42}, \quad \frac{41\pi}{42}.$$

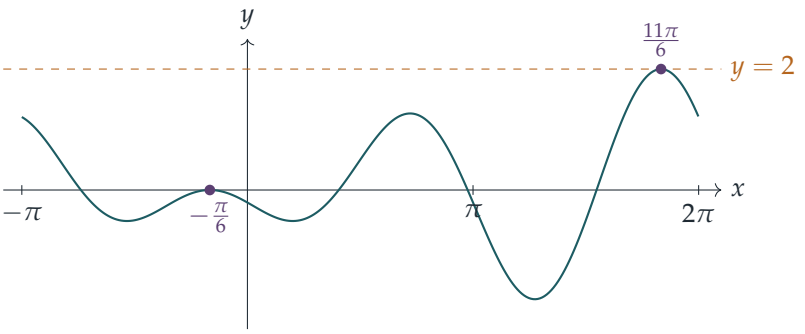
である。

考えてみよう 両方のリストに現れる値は、なぜ特別なのだろうか。

$x = -\frac{\pi}{6}$ では 2 つの余弦因数がともに 0 になる。どちらも零点を通過する余弦なので、そこで符号を変える（cos が 0 となる点では sin は ± 1 なので、導関数（derivative）は 0 でない）。したがって $x = -\frac{\pi}{6}$ の近くで f は定数と $(x + \frac{\pi}{6})^2$ の積のように振る舞う。2 回の符号変化の積は符号変化を生まないのである。実際、x が増加して $-\frac{\pi}{6}$ を通過するとき、第 1 の因数は正から負へ変わり（その偏角は増加しながら $\frac{\pi}{2}$ を通過する）、第 2 の因数は負から正へ変わる（その偏角は増加しながら $-\frac{\pi}{2}$ を通過する）ので、f は両側で負である。よって曲線は

$$x = -\frac{\pi}{6}.$$

において x 軸を横切らずに接する。他の 3 つの零点では一方の因数だけが 0 になるので、f は符号を変え、曲線は軸を横切る。



小問 (iii)

$\cos A \le 1$ かつ $\cos B \le 1$ であるから $f(x) \le 2$ であり、等号が成り立つのは $\cos A = 1$ かつ $\cos B = 1$ のとき、かつそのときに限る。もとの関数で書けば、

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \iff 2x + \frac{\pi}{3} = 2m\pi \iff x = -\frac{\pi}{6} + m\pi,$$
$$\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \iff x = \frac{\pi}{2} + \frac{4n\pi}{3},$$

である（m、n は整数）。両方が成り立つのは $-\frac{\pi}{6} + m\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4n\pi}{3}$ のときである。両辺に $\frac{6}{\pi}$ を掛けると $6m - 1 = 3 + 8n$、すなわち

$$3m - 4n = 2.$$

となる。解の 1 つは $m = 2$、$n = 1$ であり、一般解は $m = 2 + 4t$、$n = 1 + 3t$ である（3 と 4 は互いに素（coprime）だからである）。よって $f(x) = 2$ となるのは

$$x = -\frac{\pi}{6} + (2 + 4t)\pi = \frac{11\pi}{6} + 4t\pi, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

のときに限る。$0 \le x \le 2\pi$ に含まれるそのような値は

$$x = \frac{11\pi}{6}.$$

のみである。確認：$2 \cdot \frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 4\pi$ かつ $\frac{3}{2} \cdot \frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$ であるから、$f = \cos 4\pi + \sin\frac{5\pi}{2} = 1 + 1 = 2$ である。

検算

- 因数分解した形は、10^4 個のランダムな点でもとの f と（10^{-12} の精度で）一致する。
- $[-\pi, \pi]$ を数値的に走査すると、符号変化が見つかるのは $-\frac{31\pi}{42}$、$\frac{17\pi}{42}$、$\frac{41\pi}{42}$ の近くのみである。$-\frac{\pi}{6}$ では**両側で** $f(-\frac{\pi}{6} \pm 10^{-3}) \approx -8.7 \times 10^{-7}$ となり、符号変化のない接する零点であることが確かめられる。

- $[0, 2\pi]$ における f の最大値は 2 であり、$x \approx 1.8333\pi = \frac{11\pi}{6}$ でとる。

よくある間違い

- $-\frac{\pi}{6}$ を 2 回書き並べてしまう、あるいはそれが両方の因数から生じていることを見落とす。これこそが接点を見つける手がかりである。
- $\cos A = 1$ と $\cos B = 1$ を別々に解いてそこで止まってしまう。2 つの条件は同じ x で同時に成り立たなければならず、そのためには整数方程式 $3m - 4n = 2$ が必要である。

STEP のその先へ

小問 (iii) は、本質的には 2 つの周期的な運動がいつ揃うかという問題である。条件 $3m - 4n = 2$ は一次ディオファントス方程式（linear Diophantine equation）であり、$\gcd(3, 4)$ が 2 を割り切るので解をもつ。同じ考え方を多くの周波数に一度に適用すると、フーリエ級数（Fourier series）や、周期関数の和それ自身がいつ周期的になるか（周期どうしの比が有理数であるときに限る）という問題へとつながる。背後にある数論については、ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。