解答例

STEP II 2008、第 5 問

純粋数学 • 置換積分

> **STEP II 2008、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q5

鍵となる考え方

どちらの積分も、導関数（derivative）を見抜くことで解ける。1 つ目では、分子 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ がちょうど分母 $1+\sin^2 x$ の導関数になっているので、積分は一目で対数（logarithm）になる。2 つ目では、$1+\sin^2 x = 2-\cos^2 x$ と書き直したうえで、分子にぽつんとある $\sin x$ が置換（substitution）$c = \cos x$ を示唆しており、その結果、標準的な部分分数分解（partial fractions）による積分が残る。すると 2 つの答えの比較は、$\sqrt{2}$ を含む 2 つの数の比較に帰着し、最後の小問の不等式（inequality）はまさにそれを決着させるように作られている。

解答

2 つの積分

2 つの積分を I_1（分子が $\sin 2x$）、I_2（分子が $\sin x$）とおく。

I_1 については、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+\sin^2 x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$ であるから、被積分関数（integrand）は $f(x) = 1+\sin^2 x > 0$ として $f'(x)/f(x)$ の形をしている。よって

$$I_1 = \Big[\ln(1+\sin^2 x)\Big]_0^{\pi/2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

I_2 については、$1+\sin^2 x = 2-\cos^2 x$ と書き、$c = \cos x$ と置換すると、$\mathrm{d}c = -\sin x\,\mathrm{d}x$ である。x が 0 から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき、c は 1 から 0 まで減少する。負号によって積分の上端と下端が入れ替わり、

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}c}{2-c^2}.$$

部分分数分解を用いると

$$\frac{1}{2-c^2} = \frac{1}{(\sqrt{2}-c)(\sqrt{2}+c)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-c} + \frac{1}{\sqrt{2}+c}\right),$$

であり、$0 \le c \le 1$ ではどちらの分母も正であるから

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\ln(\sqrt{2}+c) - \ln(\sqrt{2}-c)\Big]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

これはきれいに整理できる。$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$ より $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$ であるから、

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2\ln(1+\sqrt{2}) = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$

不等式

二項定理(binomial theorem)により、$(\sqrt{2})^2 = 2$、$(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$、$(\sqrt{2})^4 = 4$、$(\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$ を用いて

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^5 &= 1 + 5\sqrt{2} + 10\cdot 2 + 10\cdot 2\sqrt{2} + 5\cdot 4 + 4\sqrt{2} \\ &= 41 + 29\sqrt{2}.\end{aligned}$$

ここで $2 < 4$ より $\sqrt{2} < 2$ であるから、$29\sqrt{2} < 58$ となり、$(1+\sqrt{2})^5 < 41 + 58 = 99$ が示された。

次に、$1.4^2 = 1.96 < 2$ であり、1.4 と $\sqrt{2}$ はともに正なので、2乗しても大小関係は保たれる。したがって $\sqrt{2} > 1.4$ である。

> **考えてみよう** $(1+\sqrt{2})^5 < 99$ と $\sqrt{2} > 1.4$ から、いったいどうして $2^{\sqrt{2}}$ について何かがわかるのだろうか。

$1.4 = \frac{7}{5}$ と書く。すると $2^{7/5}$ は $2^7 = 128$ の5乗根であり、$1+\sqrt{2}$ の5乗はちょうど先ほど評価したものである。正確に述べよう。$t \mapsto 2^t$ は増加関数（increasing function）であり、$\sqrt{2} > \frac{7}{5}$ であるから

$$2^{\sqrt{2}} > 2^{7/5}.$$

また $(1+\sqrt{2})^5 < 99 < 128 = (2^{7/5})^5$ であり、$y \mapsto y^5$ は $y > 0$ で増加するので、正の5乗根をとると $1+\sqrt{2} < 2^{7/5}$ を得る。これらを合わせて

$$2^{\sqrt{2}} > 2^{7/5} > 1 + \sqrt{2}.$$

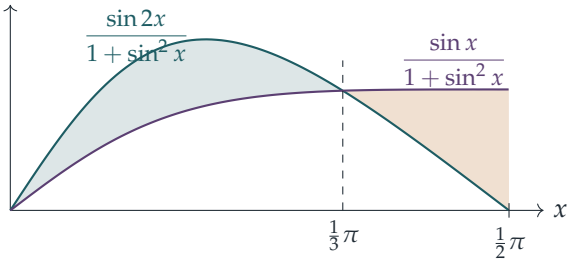
どちらの積分が大きいか

関数 ln は増加関数であるから、最後の不等式より $\ln(2^{\sqrt{2}}) > \ln(1+\sqrt{2})$、すなわち $\sqrt{2}\ln 2 > \ln(1+\sqrt{2})$ が成り立つ。両辺を $\sqrt{2} > 0$ で割って

$$I_1 = \ln 2 > \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = I_2.$$

したがって、分子が $\sin 2x$ である積分のほうが大きい。

この比較は、被積分関数から直接読み取れるものではない。$\sin 2x - \sin x = \sin x\,(2\cos x - 1)$ であるから、1 つ目の被積分関数は $0 < x < \frac{1}{3}\pi$ では大きく、$\frac{1}{3}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ では小さい。



問題は、青緑色の領域が琥珀色の領域より大きいかどうかである。実際に大きいのだが、その差はわずか 0.07 ほどにすぎない。だからこそ、$\sqrt{2}$ を用いた慎重な計算が必要だったのである。

検算

- もとの被積分関数にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると $I_1 \approx 0.693147$、$I_2 \approx 0.623225$ となり、$\ln 2$ および $\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{2}$ と小数第 10 位まで一致する。
- $(1+\sqrt{2})^5 \approx 82.01$、$41 + 29\sqrt{2} \approx 82.01$ であり、99 を十分下回っている。
- $2^{\sqrt{2}} \approx 2.665$、$2^{1.4} \approx 2.639$、$1+\sqrt{2} \approx 2.414$ であり、主張どおりの順に並んでいる。
- I_2 の妥当性の確認：被積分関数は $\frac{1}{2}\sin x$ と $\sin x$ の間にあるので $\frac{1}{2} < I_2 < 1$ であり、0.62 はこれを満たしている。

よくある間違い

- $\mathrm{d}c = -\sin x\,\mathrm{d}x$ によって積分の上端と下端が入れ替わることを忘れ、正の被積分関数なのに負の値を得てしまう。

- I_2 を $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ のままにしておく。これが $(\sqrt{2}+1)^2$ であることに気づかないと、最後の小問での $1+\sqrt{2}$ とのつながりが見えなくなる。
- 電卓を使って $2^{\sqrt{2}} > 1+\sqrt{2}$ と主張する。問題が求めているのは $2^{7/5}$ を経由する不等式の連鎖であり、2^t と y^5 の単調性（monotonicity）を明示することである。

STEP のその先へ

そもそも $2^{\sqrt{2}}$ とは何を意味するのだろうか。大学では、これは $e^{\sqrt{2}\ln 2}$ として**定義**される。そして、ここで用いた事実、すなわち 2^t が有理数の t だけでなく無理数の t に対しても t について増加するということは、解析学（analysis）の最初の講義で丁寧に証明される指数関数（exponential function）の性質から導かれる。（ゲルフォント（Gelfond）とシュナイダー（Schneider）による有名な定理によれば、$2^{\sqrt{2}}$ は実は超越数（transcendental number）である。）e^x と $\ln x$ の丁寧な構成については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。