解答例

STEP II 2008、第 4 問

純粋数学 • 陰関数の微分

> **STEP II 2008、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q4

鍵となる考え方

2 直線のなす角は、ベクトルを用いると最も扱いやすい。$F(x,y)=1$ の法線（normal）は ∇F の向きを向く。また、平面上の 2 つのベクトル $\mathbf{p}$ と $\mathbf{n}$ のなす角の tan は、外積（cross product）の大きさ |外積| を内積（dot product）で割ったものである。ここでは、内積がちょうど曲線の方程式の左辺に一致し、その値は 1 となる。そうすれば、θ が停留する（stationary）のは y^2-x^2 が停留するときであり、かつそのときに限る。あとは x^2+y^2 と xy を用いた代数計算である。

解答

傾き

$x^2+y^2+2axy=1$ を x について陰関数微分（implicit differentiation）すると、

$$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2a\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad (ax+y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-(x+ay).$$

よって、$ax+y\neq 0$ である限り、傾き（gradient）は $-\dfrac{x+ay}{ax+y}$ であり、題意が示された。

角 θ

接線（tangent）の方向は $(ax+y,\ -(x+ay))$ であるから、法線の方向は、これに垂直なベクトル

$$\mathbf{n}=(x+ay,\ ax+y),$$

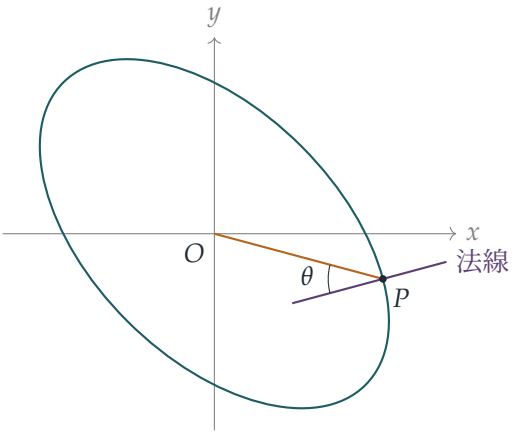
である。（これは $F = x^2 + y^2 + 2axy$ に対する $\frac{1}{2}\nabla F$ であり、$ax + y = 0$ となる点でも意味をもつ。）ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は $\mathbf{p} = (x, y)$ である。$\mathbf{p}$ と $\mathbf{n}$ のなす角を ϕ とする。すると

$$|\mathbf{p}||\mathbf{n}|\cos\phi = \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = x(x+ay) + y(ax+y) = x^2 + y^2 + 2axy = 1,$$
$$|\mathbf{p}||\mathbf{n}|\sin\phi = |x(ax+y) - y(x+ay)| = |ax^2 - ay^2| = a|y^2 - x^2|,$$

となる。ここで 2 行目は 2 次元の外積の大きさ（$\mathbf{p}$ と $\mathbf{n}$ が張る平行四辺形の面積）であり、$a > 0$ を用いた。

内積は $+1 > 0$ であるから、ϕ ははじめから鋭角（acute）（または 0）であり、$\phi = \theta$ である。2 つの式を割ると、

$$\tan\theta = a\,|y^2 - x^2|.$$



図（$a = \frac{1}{2}$ の場合）は曲線を示している。$0 < a < 1$ であるから、これは軸が $y = \pm x$ に沿った楕円（ellipse）である。図に描いた点 P は、θ が最大となる点の 1 つである。

小問 (i)

関数 $t \mapsto \arctan(t)$ は狭義単調増加であるから、$f \neq 0$ となるところでは、θ は $f = y^2 - x^2$ の滑らかな増加関数である。

> **考えてみよう** $y^2 = x^2$ となる点、すなわち絶対値のために角ができる点ではどうか？

そこでは $\theta = 0$ である。そのような点で θ の導関数が 0 ならば、$a|f|$ を x の変化量で割ったものは 0 に近づくので、$\mathrm{d}f/\mathrm{d}x = 0$ でもなければならない。したがって、どの場合でも

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 - x^2) = 0 \implies y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x.$$

ここでは傾きの公式を用いているので、$ax+y\neq 0$ である（これが自動的に成り立つことは後で確かめる）。代入して $ax+y$ を掛けると、

$$-y(x+ay)=x(ax+y) \implies -xy-ay^2=ax^2+xy \implies a(x^2+y^2)+2xy=0.$$

これが (i) である。

ちなみに、$ax+y=0$ であれば、(i) より $ax^2(1+a^2)-2ax^2=-a(1-a^2)x^2=0$ となり、$x=y=0$ となるが、これは曲線上にない。よって、そのような点が問題を引き起こすことはない。

小問 (ii)

$S=x^2+y^2$ とおく。(i) より $2xy=-aS$ である。これを曲線の方程式に代入すると、

$$S+a(-aS)=1 \quad\implies\quad S=\frac{1}{1-a^2}.$$

したがって

$$x^2+y^2+2xy=S-aS=\frac{1-a}{1-a^2}=\frac{1}{1+a},$$

すなわち $(1+a)(x^2+y^2+2xy)=1$ であり、題意が示された。

小問 (iii)

$|y^2-x^2|$ を求めればよい。$(y^2-x^2)^2=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=S^2-(2xy)^2$ を用いると、

$$(y^2-x^2)^2=S^2-a^2S^2=(1-a^2)\cdot\frac{1}{(1-a^2)^2}=\frac{1}{1-a^2}.$$

正の平方根をとると（$0<a<1$ より妥当である）、$|y^2-x^2|=1/\sqrt{1-a^2}$ となり、したがって

$$\tan\theta=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

検算

- 座標軸を回転する。$u=(x+y)/\sqrt{2}$、$v=(x-y)/\sqrt{2}$ とおくと、曲線は $(1+a)u^2+(1-a)v^2=1$ となり、$y^2-x^2=-2uv$ である。AM–GM（相加平均と相乗平均の不等式）より $1\geq 2\sqrt{(1-a^2)}\,|uv|$ であるから、$\tan\theta=2a|uv|\leq a/\sqrt{1-a^2}$ であり、等号は $(1+a)u^2=\frac{1}{2}$ のときに成り立つ。$x^2+y^2+2xy=2u^2$ であるから、この等号成立条件はまさに (ii) である。よって、停留値は θ の最大値である。
- $a=\frac{1}{2}$ の場合：$P\approx(1.1154,\,-0.2989)$ は曲線の方程式と (i) を満たし、$\tan\theta=\frac{1}{2}|y^2-x^2|\approx 0.5774=1/\sqrt{3}$ であるから、$\theta=30^\circ$ である。いくつかの a の値につ

いて楕円を一周しながら $\tan\theta$ を数値的に調べると、その最大値はちょうどこれらの値になる。

- $a \to 0$ のとき、曲線は単位円になり、その法線は O を通るので $\theta \to 0$ となる。これは $\tan\theta \to 0$ と整合する。

よくある間違い

- OP と法線の傾きを用いて $\tan(\alpha - \beta)$ を使うこと。この方法でも解けるが、$x = 0$ の場合や符号に注意が必要であり、ベクトルを用いる方法ならその両方を避けられる。
- 求めた角がなぜ**鋭角**のほうなのかを忘れること。内積が $+1$ であることがこれを決定づける。
- $|y^2 - x^2|$ を求めるために 2 乗し、その後で正の平方根をとるのを忘れること。

STEP のその先へ

$x^2 + y^2 + 2axy$ を $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ による二次形式（quadratic form）$\mathbf{x}^{\mathsf{T}} A \mathbf{x}$ として書くと、楕円の軸は A の固有ベクトル（eigenvector）$(1,1)$ と $(1,-1)$ であり、固有値（eigenvalue）$1 \pm a$ から半軸が得られる。このような対称行列（symmetric matrix）の対角化（diagonalisation）は、大学 1 年次の線形代数（linear algebra）の中心的な考え方である。Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。