解答例

STEP II 2008、第 3 問

純粋数学 • 不等式と背理法

> **STEP II 2008、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q3

鍵となる考え方

略図から、$x \geq 0$ では 3 次曲線（cubic）が x 軸より下に出ないことがわかり、「$y \geq 0$」を変形すると不等式（inequality）$x^2(1-x) \leq 4/27$ が得られる。背理法（proof by contradiction）の部分では、3 つの数 $bc(1-a), ca(1-b), ab(1-c)$ は 1 つずつ見ると扱いにくいが、それらの積は $a^2(1-a)\cdot b^2(1-b)\cdot c^2(1-c)$ と組み替えられ、これは最初の結果で抑えられることに注目する。小問 (ii) は、3 次関数の代わりに 2 次関数（quadratic）を用いた同じ手法である。

解答

小問 (i)：曲線

$y = 27x^3 - 27x^2 + 4$ を微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 81x^2 - 54x = 27x(3x-2),$$

となり、これは $x = 0$ と $x = \frac{2}{3}$ でゼロになる。$x = 0$ のとき $y = 4$ であり、$x = \frac{2}{3}$ のとき

$$y = 27\cdot\tfrac{8}{27} - 27\cdot\tfrac{4}{9} + 4 = 8 - 12 + 4 = 0.$$

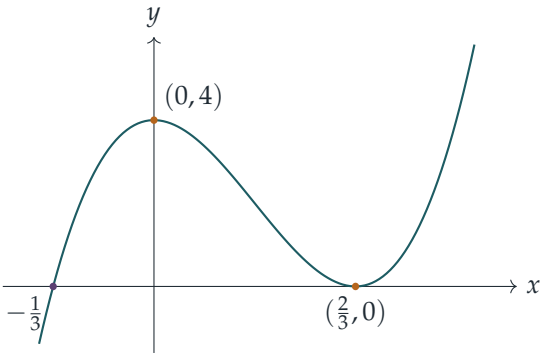
である。$\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 162x - 54$ は $x = 0$ で $-54 < 0$、$x = \frac{2}{3}$ で $54 > 0$ となるから、停留点（turning point）は $(0,4)$ における極大（maximum）と $(\frac{2}{3},0)$ における極小（minimum）である。

極小点は x 軸上にあるので、曲線はそこで軸に接し、$(3x-2)^2$ は因数（factor）であ

る。x^3 の係数と定数項を比較すると

$$27x^3 - 27x^2 + 4 = (3x-2)^2(3x+1),$$

となるので、曲線が軸と交わる他の点は $x = -\frac{1}{3}$ のみである。曲線は $-\infty$ から上昇し、$x = -\frac{1}{3}$ で軸を横切り、$(0,4)$ で山の頂上に達し、下がって $(\frac{2}{3},0)$ で軸に接し、その後再び上昇する。



小問 (i)：不等式

$x \geq 0$ に対しては $3x+1 > 0$ かつ $(3x-2)^2 \geq 0$ であるから、因数分解より $27x^3 - 27x^2 + 4 \geq 0$ である。（同じことだが、略図からもわかる：$x \geq 0$ の範囲では、曲線の最も低い点は極小点 $(\frac{2}{3},0)$ である。）変形すると、

$$4 \geq 27x^2 - 27x^3 = 27x^2(1-x), \qquad \text{よって} \qquad x^2(1-x) \leq \frac{4}{27} \quad \text{任意の} x \geq 0,$$

が成り立ち、等号は $x = \frac{2}{3}$ のときのみ成り立つ。これが求める結果である。

小問 (i)：矛盾の導出

背理法のため、3 つの数がすべて 4/27 を超えると仮定する：

$$bc(1-a) > \tfrac{4}{27}, \qquad ca(1-b) > \tfrac{4}{27}, \qquad ab(1-c) > \tfrac{4}{27}.$$

ここに現れる 6 つの量はすべて正であるから、3 つの不等式を辺々掛け合わせてよい：

$$bc(1-a)\cdot ca(1-b)\cdot ab(1-c) > \left(\tfrac{4}{27}\right)^3.$$

考えてみよう 最初の結果は、これらの入り混じった積について何を教えてくれるだろうか？

左辺を、各文字がそれ自身の括弧とひとまとまりになるように組み替える：

$$bc(1-a)\cdot ca(1-b)\cdot ab(1-c) = [a^2(1-a)][b^2(1-b)][c^2(1-c)].$$

a, b, c はいずれも非負であるから、最初の結果により、各括弧は 0（$1-a \geq 0$ などより）と $4/27$ の間にある。非負の数どうしのこれら 3 つの不等式を掛け合わせると、

$$[a^2(1-a)][b^2(1-b)][c^2(1-c)] \leq \left(\tfrac{4}{27}\right)^3.$$

これは上の狭義の不等式に矛盾する。よって仮定は誤りであり、$bc(1-a), ca(1-b), ab(1-c)$ のうち少なくとも 1 つは $4/27$ 以下である。

小問 (ii)

同じ考え方は 2 次関数でも通用する。任意の実数 t に対して、平方完成（completing the square）により

$$t(1-t) = \tfrac{1}{4} - (t-\tfrac{1}{2})^2 \leq \tfrac{1}{4},$$

が成り立つ。背理法のため、$p(1-q) > \frac{1}{4}$ かつ $q(1-p) > \frac{1}{4}$ と仮定する。両辺とも正であるから、掛け合わせると

$$p(1-q)\cdot q(1-p) > \tfrac{1}{16}.$$

しかし左辺は $[p(1-p)][q(1-q)]$ と組み替えられ、$0 < p, q < 1$ であるから各括弧は 0 と $\frac{1}{4}$ の間にあり、積は高々 $\frac{1}{16}$ である。これは矛盾であるから、$p(1-q)$ と $q(1-p)$ のうち少なくとも 1 つは $\frac{1}{4}$ 以下である。

検算

- 等号成立の場合：$a = b = c = \frac{2}{3}$ とすると (i) の 3 つの数はすべて $\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ に等しくなり、$p = q = \frac{1}{2}$ とすると (ii) の 2 つの数はともに $\frac{1}{4}$ に等しくなる。よって上界 $4/27$ と $1/4$ はこれ以上改良できない。
- $(3x-2)^2(3x+1) = (9x^2-12x+4)(3x+1) = 27x^3 - 27x^2 + 4$ と展開すると、因数分解が正しいことが確かめられる。
- 数値的には、$[0,3]$ における $x^2(1-x)$ の最大値は $0.148148\ldots = 4/27$ である。$(0,1)$ 内の無作為な 3 つ組 (a,b,c) 100 万個について、3 つの積のうち最小のものは一度も 0.1468 を超えず、無作為な組 100 万個について、$p(1-q), q(1-p)$ の小さい方は一度も 0.24998 を超えなかった。

よくある間違い

- すべてが正であることを述べずに不等式を掛け合わせること。「$A > \alpha, B > \beta$ ならば $AB > \alpha\beta$」という推論は負の数では成り立たないので、仮定 $0 < a, b, c < 1$ は本当に必要である。
- 上界 $x^2(1-x) \leq 4/27$ を $x < 0$ に対して用いること。そこではこれは誤りである（$x = -1$ を試してみよ）。
- 特定の 1 つの数、たとえば $bc(1-a)$ が小さいことだけを示そうとすること。その数が小さいとは限らない：a が 0 に近く、$b = c$ が 1 に近いとき、それは 1 に近い。

STEP のその先へ

対称な評価が適用できるように量の積をとる手法は、相加・相乗平均の不等式（AM–GM inequality）の近い親戚であり、これを使えば最初の結果が直接得られる：$0 \leq x \leq 1$ に対して、（和が 1 になる）$\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, 1-x$ に相加・相乗平均の不等式を適用すると $\frac{x^2}{4}(1-x) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$ が得られる。この議論には鳩の巣原理（pigeonhole principle）の趣もある：積が小さければ、すべての因数が大きいということはありえない。こうした評価と最適化の考え方は大学 1 年次の解析学（analysis）で展開される。Abbott の *Understanding Analysis* は入門に最適な親しみやすい本であり、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* にはこのスタイルの STEP の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。