解答例

STEP II 2008、第 2 問

純粋数学 • 部分分数分解と級数

> **STEP II 2008、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q2

鍵となる考え方

部分分数分解（partial fractions）を用いると、扱いにくい一つの有理関数（rational function）が、展開をよく知っている三つの部分に分かれる。すなわち、等比級数（geometric series）、その導関数、そして $-x^2$ についての等比級数である。最初の二つからは n に比例して増える係数が得られ、三つ目は常に $\pm\frac{1}{2}$ しか寄与せず、それが周期 4 で繰り返される。「どちらか一方」という場合分けはここから生じる。最後の小問では、関数の値が与えられた分数になるような x の値を探せばよい。

解答

部分分数分解

$(1-x)^2$ は重複する一次因数であり、$1+x^2$ は既約な（irreducible）二次式であるから、

$$\frac{1+x}{(1-x)^2(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2},$$

とおく。このとき、すべての x について

$$1+x = A(1-x)(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)(1-x)^2.$$

が成り立つ。

- $x=1$ を代入すると $2=2B$ となり、$B=1$ である。
- $x=0$ を代入すると $1=A+B+D$ となり、$A=-D$ である。
- $x=\mathrm{i}$ を代入する（これは多項式の恒等式であるから許される）と、$1+\mathrm{i}=$

$(Ci+D)(1-i)^2 = (Ci+D)(-2i) = 2C-2Di$ となる。実部と虚部を比較して $C=\frac{1}{2}$、$D=-\frac{1}{2}$ を得るので、$A=\frac{1}{2}$ である。

検算として、右辺の x^3 の係数は $-A+C=0$ であり、左辺と一致する。よって

$$\frac{1+x}{(1-x)^2(1+x^2)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1-x}{2(1+x^2)}.$$

係数

$|x|<1$ のとき三つの展開はすべて収束（converge）し、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(1-x)} &= \tfrac{1}{2}\sum_{n\geq 0} x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n,\\ -\frac{1-x}{2(1+x^2)} &= -\tfrac{1}{2}(1-x)\left(1-x^2+x^4-x^6+\cdots\right)\\ &= -\tfrac{1}{2}\left(1-x-x^2+x^3+x^4-x^5-x^6+x^7+\cdots\right).\end{aligned}$$

となる。最後の行の括弧内の係数は $1,-1,-1,1$ が周期 4 で繰り返される。すなわち、$n=2k$ のとき x^n の係数は $(-1)^k$ であり、$n=2k+1$ のとき $-(-1)^k$ である。したがって三つ目の部分は、$n\equiv 0$ または $3 \pmod 4$ のとき x^n に $-\frac{1}{2}$ を、$n\equiv 1$ または $2 \pmod 4$ のとき $+\frac{1}{2}$ を寄与する。

> **考えてみよう** 周期 4 のパターンから、四通りではなくちょうど二通りの場合が生じるのはなぜか。

符号だけが問題になるからである。三つの寄与を足し合わせると

$$a_n = \tfrac{1}{2} + (n+1) \mp \tfrac{1}{2} = \begin{cases} n+1, & n\equiv 0 \text{ または} 3 \pmod 4,\\ n+2, & n\equiv 1 \text{ または} 2 \pmod 4,\end{cases}$$

となり、これが求める結果である。この数列は $1,3,4,4,5,7,8,8,9,11,12,12,\ldots$ と始まる。

小数による近似

> **考えてみよう** どの x の値に対して、関数の値が $\frac{11\,000}{8181}$ になるか。

分母の形から $x=\frac{1}{10}$ が思い浮かぶ。このとき $(1-x)^2=0.81$、$1+x^2=1.01$ であるから $(1-x)^2(1+x^2)=0.8181$ となり、

$$\frac{1+\frac{1}{10}}{0.8181} = \frac{1.1}{0.8181} = \frac{11\,000}{8181}.$$

である。$\frac{1}{10} < 1$ であるから級数展開は有効であり、

$$\frac{11\,000}{8181} = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{10^n} = 1 + 0.3 + 0.04 + 0.004 + 0.0005 + 0.00007 + \cdots .$$

となる。$a_n \leq 9$ である間（すなわち $n = 8$ まで）は、係数がそのまま小数の各桁の数字になり、1.34457889 を得る。その先は係数が二桁になるので、繰り上がりを考えなければならない。

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{8} \frac{a_n}{10^n} &= 1.344\,578\,89 \\
+ 11 \times 10^{-9} &\to 1.344\,578\,901 \\
+ 12 \times 10^{-10} &\to 1.344\,578\,902\,2 \\
+ 12 \times 10^{-11} &\to 1.344\,578\,902\,32 \\
+ 13 \times 10^{-12} &\to 1.344\,578\,902\,333.
\end{aligned}$$

これ以降の項は有効数字（significant figures）の 11 桁目以降にしか影響しないので、有効数字 9 桁で

$$\frac{11\,000}{8181} \approx 1.344\,578\,90.$$

である。

検算

- 関数に $x = 0$ を代入すると $1 = a_0$ となり、$n = 0$ は $n+1$ の場合に当てはまる。$(1+x)(1+2x+\cdots)(1-x^2+\cdots)$ を展開すると $1+3x+\cdots$ となるので、$a_1 = 3 = 1+2$ である。
- 筆算による割り算で $11\,000/8181 = 1.344\,578\,902\,33\ldots$ を得て、級数による結果と一致する。また、$n < 60$ について冪級数（power series）の厳密な割り算によって a_n を確かめ、部分分数分解の恒等式も多数の無作為な有理数の点で確かめた。

よくある間違い

- 繰り上がりを忘れること。a_n からそのまま数字を読み取ると 1.34457889… となり、有効数字 9 桁目が誤りになる。
- $\frac{Cx+D}{1+x^2}$ の代わりに $\frac{D}{1+x^2}$ と書いてしまうこと。既約な二次式に対しては、分子を一次式にする必要がある。
- 1.344578902… を 1.34457890 に丸めたうえで、最後の 0 を落としてしまうこと。ここではこの 0 も有効数字である。

STEP のその先へ

有理関数は常に冪級数展開をもち、その係数は n の多項式に、r^n のような項や周期的なパターンを加えたものになる。これらは分母の根一つひとつに対応している。これが**線形漸化式**（linear recurrences）と**母関数**（generating functions）の理論である。本問では、根 1（重根）と $\pm i$ がそれぞれ線形の増加と周期 4 の揺らぎを生み出している。また、どんな分数の小数表示もいずれ循環するのも、同じ理由による。Wilf の *generatingfunctionology*（母関数論）は生き生きとした入門書で、無料で入手できる。また Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、同じ趣旨の問題がさらに収録されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。