解答例

# STEP II 2008、第 12 問

確率・統計 ・ 独立な事象

**STEP II 2008、問 12**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s2-q12

## 鍵となる考え方

個数の期待値（expectation）は、それを構成する個々の事象の確率の和である。したがって、最初の部分は $p$ についての一つの二次方程式（quadratic）に帰着する。第二の部分では、裁判官たちは被告人を見ることなく心の中でコインを投げるので、王の宣告は真実と独立（independent）である。正しい宣告がなされる確率を $t$ を用いて表し、それを $\frac{1}{2}$ のまわりで整理し直すと、答えは一行で得られる。

## 解答

### $p$ を求める

ロバ、ビーバー、ケンタウロスがそれぞれ有罪の評決を下す事象を $A$、$B$、$C$ とし、それらの指示変数（indicator variable）を $I_A$、$I_B$、$I_C$ とする（事象が起これば 1、そうでなければ 0 をとる）。このとき $X = I_A + I_B + I_C$ であり、$\mathrm{E}(I_A) = \mathrm{P}(A)$ などが成り立つから、期待値の線形性（linearity of expectation）により

$$\mathrm{E}(X) = p + \frac{p}{3} + p^2.$$

を得る。（線形性に独立性は必要ない。独立性を用いるのはもっと後である。）これを $\frac{4}{3}$ に等しいとおき、両辺を 3 倍すると

$$3p^2 + 4p - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (3p - 2)(p + 2) = 0.$$

となる。確率は負にはなりえないので $p + 2 \neq 0$ であり、したがって

$$p = \frac{2}{3}.$$

である。よって、3 人の裁判官が「有罪」と言う確率は

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3},\qquad \mathrm{P}(B)=\frac{2}{9},\qquad \mathrm{P}(C)=\frac{4}{9},$$

であり、当然そうであるべきように、いずれも $[0,1]$ に含まれる。

### 王が「有罪」と言う確率

少なくとも 2 人の裁判官が有罪の評決を下す事象を $K$ とする。すると $K$ は、王が被告人を有罪と宣告する事象である。上の 3 つの確率を $a$、$b$、$c$ と書く。ちょうど 2 人が有罪とする場合は 3 通り、3 人全員が有罪とする場合は 1 通りある。裁判官たちの独立性を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(K)&=ab(1-c)+ac(1-b)+bc(1-a)+abc\\&=ab+ac+bc-2abc.\end{aligned}$$

となる。ここで $ab=\frac{4}{27}$、$ac=\frac{8}{27}$、$bc=\frac{8}{81}$、$abc=\frac{16}{243}$ であるから

$$\mathrm{P}(K)=\frac{36}{243}+\frac{72}{243}+\frac{24}{243}-\frac{32}{243}=\frac{100}{243}.$$

である。簡単のため、これを $g$ とおく。

### $t$ を求める

被告人が実際に有罪である事象を $D$ とすると、$\mathrm{P}(D)=t$ である。王が正しいのは、$D$ と $K$ がともに起こるとき、またはどちらも起こらないときである。

**考えてみよう** なぜ $\mathrm{P}(D)$ と $\mathrm{P}(K)$ を掛け合わせてよいのか？

裁判官たちは「まったくでたらめに」決める。つまり彼らの評決は証拠に依存しないので、$K$ は $D$ と独立である。よって

$$\mathrm{P}(\text{正しい})=\mathrm{P}(D)\,\mathrm{P}(K)+\mathrm{P}(D')\,\mathrm{P}(K')=tg+(1-t)(1-g).$$

となる。ここで $\frac{1}{2}$ を引いて因数分解すると

$$\begin{aligned}tg+(1-t)(1-g)-\tfrac{1}{2}&=2tg-t-g+\tfrac{1}{2}\\&=(2t-1)(g-\tfrac{1}{2}).\end{aligned}$$

となる。したがって、王が確率 $\frac{1}{2}$ で正しいのは $(2t-1)(g-\frac{1}{2})=0$ のとき、かつそのときに限る。$g=\frac{100}{243}\neq\frac{1}{2}$ であるから第二の因数は 0 でなく、

$$t=\frac{1}{2}.$$

でなければならない。因数分解を使わずに同じことを示すこともできる。$\frac{100}{243}t + \frac{143}{243}(1-t) = \frac{1}{2}$ から $143 - 43t = \frac{243}{2}$ が得られ、$43t = \frac{43}{2}$、すなわち $t = \frac{1}{2}$ である。

ここで $p$ の値はほとんど関係しないことに注意しよう。裁判官たちの確率が何であっても、$\mathrm{P}(K) \neq \frac{1}{2}$ でありさえすれば、証拠を無視する法廷が半分の確率で正しいのは、有罪の被告人と無罪の被告人が同じ割合で現れるとき、かつそのときに限る。

## 検算

- $p = \frac{2}{3}$ のとき、$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ となり、条件を満たす。
- 8 通りの評決パターンすべてを分数で正確に数え上げると、$\mathrm{P}(K) = \frac{100}{243} \approx 0.412$、$\mathrm{E}(X) = \frac{4}{3}$ となる。
- $t = \frac{1}{2}$ として 200 000 回の試行をシミュレーションしたところ、王が正しかった割合は 0.5007 であった。
- 式の妥当性の確認：$t = 1$（全員が有罪）ならば王が正しい確率は $g$、$t = 0$ ならば $1 - g$ である。この確率は $t$ について一次式なので、中点で $\frac{1}{2}$ を通る。

## よくある間違い

- 「少なくとも 2 人」を $ab + ac + bc$ としてしまう。これでは 3 人全員の場合を 3 回数えている。正しい式では $2abc$ を引く（あるいは、互いに排反な 4 つの場合を直接足し合わせる）。
- $p = -2$ を除外し忘れる、あるいは $p^2$ と $p/3$ が確率として妥当であることを確かめない。
- 「王が正しく宣告する」ことを $\mathrm{P}(K)$ だけで捉え、正しく無罪とされる無実の被告人を忘れてしまう。

## STEP のその先へ

最初の部分は、強力な手法の小さな一例である。それは、個数を指示変数の和として表すことで、事象どうしが独立でなくても、その期待値を単なる確率の和として求めるという手法である。大学の確率論ではこれを絶えず用いる。たとえば、ランダムな置換（permutation）の不動点（fixed point）の個数の期待値を求めるときがそうである。第二の部分は、出力が真実と独立な分類器（classifier）についての話であり、検査における感度（sensitivity）、特異度（specificity）、そしてベイズ（Bayes）の定理を

考える出発点となる。Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）は指示変数を多用しており、次の一歩として好適である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。