解答例

STEP II 2008、第 11 問

力学 ・ 動く楔上の質点

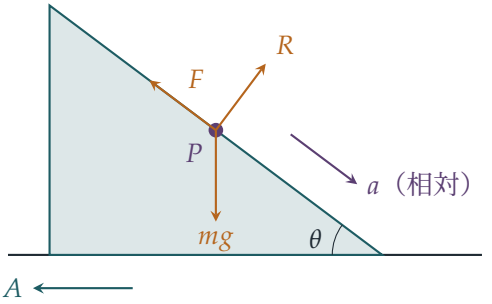
> **STEP II 2008、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q11

鍵となる考え方

系の外から水平方向に押すものは何もない（床はなめらか（smooth）である）ので、質点（particle）とくさび（wedge）を合わせた系の水平方向の運動量（momentum）はゼロのままである。これにより、くさびの加速度はほとんど労せずに得られる。それ以外はすべて、質点の**真の**加速度を「くさびに対する相対加速度（relative acceleration）にくさびの加速度を加えたもの」と書き、そのうえで質点にはたらく力を斜面に平行な方向と垂直な方向に分解する（resolve）ことから得られる。静止した観測者から見た経路は、真の加速度の方向を向く直線である。すべてが静止状態から始まり、加速度が一定だからである。

解答

P を質点、くさびを剛体（rigid body）としてモデル化する。床はなめらかであり、斜面は摩擦係数（coefficient of friction）μ をもつ粗い（rough）面である。鉛直な面を左側に置き、斜面が右下がりになるようにする。P が右へ滑り下りると、くさびは左へ押される。くさびの加速度を**左向きに** A とし、**くさびに対する** P の加速度を斜面に沿って下向きに a とする。P が受ける垂直抗力（normal reaction）を R、摩擦力を F とする。摩擦力は、P が滑り下りている間は斜面に沿って上向きにはたらく。



右向きに x 軸、上向きに y 軸をとる。斜面に沿って下向きの単位ベクトルは $(\cos\theta, -\sin\theta)$ であるから、P の真の加速度は次のようになる。

$$(a\cos\theta - A,\ -a\sin\theta).$$

小問 (i)：くさびの加速度

系「P とくさび」にはたらく外力（external force）は、重力となめらかな床からの垂直抗力だけであり、どちらも鉛直方向である。したがって水平方向の運動量の総和は一定であり、すべてが静止状態から始まるのでその値はゼロである。よって $m\times$（加速度）の水平成分の和はゼロになる：

$$m(a\cos\theta - A) + km(-A) = 0 \quad\Longrightarrow\quad A = \frac{a\cos\theta}{k+1},$$

これが求める結果である。（P とくさびの間にはたらく力 R と F は内力（internal force）であり、ニュートン（Newton）の第 3 法則により打ち消し合う。）

小問 (i)：45° の経路

考えてみよう 観測される経路が、真の加速度の方向を向く直線でなければならないのはなぜか？

以下の運動方程式により a と A は定数として定まるので、P の真の加速度は一定のベクトルである。静止状態から出発するので、速度は常にそのベクトルの t 倍、変位は $\frac{1}{2}t^2$ 倍であり、したがってその方向の一定の直線に沿って動く。

P の加速度の水平成分は

$$a\cos\theta - \frac{a\cos\theta}{k+1} = \frac{k}{k+1}\,a\cos\theta,$$

であり、鉛直成分の大きさは $a\sin\theta$ である。45° の直線とは、これらが等しいことを意味する：

$$a\sin\theta = \frac{k}{k+1}\,a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \tan\theta = \frac{k}{k+1},$$

ここで $a\cos\theta \neq 0$ で割った（P は実際に滑るので $a > 0$ である）。これが求める結果である。

小問 (i)：$k = 3$ の場合

このとき $\tan\theta = \frac{3}{4}$ であるから $\sin\theta = \frac{3}{5}$、$\cos\theta = \frac{4}{5}$ であり、$A = \frac{a\cdot 4/5}{4} = \frac{a}{5}$ である。

P について力を分解する。その真の加速度は、斜面に沿って下向きに $a - A\cos\theta$、外向きの法線方向に $-A\sin\theta$ の成分をもつ（くさびの左向きの加速度がこれらの成分をもち、相対加速度は斜面に沿った成分のみである）。

斜面に垂直な方向：

$$R - mg\cos\theta = -mA\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad R = m\left(\tfrac{4}{5}g - \tfrac{3}{25}a\right).$$

R は $mg\cos\theta$ より**小さい**ことに注意せよ。くさびが P から離れるように落ちていくのである。

斜面に沿って下向きには、P が滑っているので $F = \mu R$ として：

$$mg\sin\theta - \mu R = m(a - A\cos\theta) = m\left(a - \tfrac{4}{25}a\right) = \tfrac{21}{25}ma.$$

R を代入し、両辺に $25/m$ を掛けると：

$$15g - 20\mu g + 3\mu a = 21a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{5g(3 - 4\mu)}{3(7 - \mu)}.$$

これは $\mu < \frac{3}{4} = \tan\theta$ のときちょうど正になる。P が滑るためにはそうでなければならず、これはそのまま小問 (ii) へとつながる。

小問 (ii)

$\tan\theta \leq \mu$ ならば、P はその場にとどまり、くさびも動かないことを示す。

静止は可能である。どちらの物体も動かないとすると、P について $R = mg\cos\theta$ と、斜面に沿って上向きの摩擦力 $F = mg\sin\theta$ が必要である。粗い接触面は、$F \leq \mu R$、すなわち $\sin\theta \leq \mu\cos\theta$、つまり $\tan\theta \leq \mu$ であればこれを供給でき、これはまさに我々の条件である。このときくさびは逆向きの R と F を受ける。それらの水平成分は、左向きに $R\sin\theta = mg\sin\theta\cos\theta$、右向きに $F\cos\theta = mg\sin\theta\cos\theta$ であり、打ち消し合う。したがってくさびもつり合い（equilibrium）の状態にあり、床は鉛直方向の力しか及ぼさない。

> **考えてみよう** 静止が可能であるとしても、それでも P が滑ることはありうるだろうか？

滑ることは不可能である。一般の k と θ について、P が $F = \mu R$ で滑り下りたと仮定する。$s = \sin\theta - \mu\cos\theta$ とおく。くさびの水平方向の運動方程式は $kmA = R\sin\theta - \mu R\cos\theta = Rs$ である。これを法線方向の方程式 $R = m(g\cos\theta - A\sin\theta)$ と組み合わせると

$$R = \frac{kmg\cos\theta}{k + s\sin\theta}, \qquad a = \frac{(k+1)\,gs}{k + s\sin\theta}.$$

を得る。接触しているためには $R > 0$ が必要であり、そのため $k + s\sin\theta > 0$ でなければならない。すると a は s と同符号である。しかし $\tan\theta \le \mu$ は $s \le 0$ を意味するので $a \le 0$ となり、滑り下りることに矛盾する。また、P を斜面に沿って**上向き**に滑らせるものもない。相対運動を起こしうるのは重力だけであり、重力の斜面方向の成分は下向きだからである。したがって $\tan\theta \le \mu$ のとき、P はくさびの上で静止したままであり、くさびも床の上で静止したままである。（$\tan\theta = \mu$ のとき摩擦は限界摩擦（limiting friction）になるが、それでも P は動かない。）

検算

- $\mu = 0$、$k = 3$ とすると $a = \frac{5g}{7}$、$A = \frac{g}{7}$ を得る。このとき P の真の加速度の水平成分は $\frac{4}{5}\cdot\frac{5g}{7} - \frac{g}{7} = \frac{3g}{7}$、鉛直成分は $\frac{3}{5}\cdot\frac{5g}{7} = \frac{3g}{7}$ であり、確かに 45° の方向である。
- $k \to \infty$(動かないくさび)のとき $A \to 0$ となり、一般の公式から $a \to g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$ が得られる。これはおなじみの固定された斜面での結果である。
- 数値的には、$g = 9.8$、$k = 3$、$\mu = 0.2$ として 3 つの運動方程式を直接解くと $a \approx 5.284\ \mathrm{m\,s^{-2}}$ となり、$\frac{5g(3-0.8)}{3(6.8)}$ と一致する。運動を時間について逐次進めてみると、水平方向の運動量はゼロに保たれ、経路はちょうど 45° になる。

よくある間違い

- $R = mg\cos\theta$ とすること。これはくさびが固定されている場合にのみ成り立つ。ここではくさびが加速して離れていくので、R はより小さい。
- 相対加速度 a だけを用いて力を分解し、くさびの加速度を忘れること。ニュートンの第 2 法則には真の加速度が必要である。
- 小問 (ii) で、P が滑っていないのに摩擦力を μR と仮定すること。摩擦力は**最大でも** μR であり、必要なだけの値をとる。

STEP のその先へ

小問 (i) の鮮やかな一歩は保存則（conservation law）である。外力に水平成分がないので、運動量の一つの成分が保存される。大学 1 年の力学では、これは対称性と保存則を結びつける一般原理となる。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、ラグランジアンが依存しない座標（ここでは系全体の水平位置）があれば、それに対応する運動量が自動的に保存される。なめらかなくさびとブロックは、そこでの標準的な最初の例である。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、まさにこの種の問題が詳しく扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。