解答例

STEP II 2008、第 10 問

力学 ・ 壁との斜め衝突

STEP II 2008、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s2-q10

鍵となる考え方

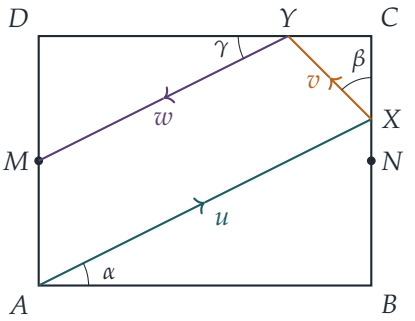
なめらかな（smooth）壁では力積（impulse）は壁に垂直であるから、速度の壁に沿う成分は変わらず、壁に向かう成分だけが e 倍される。速度を AB に平行な成分と AD に平行な成分に分解すると、すべてが見通しよくなる。各衝突では二つの成分のうち一方だけが定数倍されるのである。二回の衝突のあとでは両方の成分が e 倍されており、これにより最終的な向きと運動エネルギー（kinetic energy）が一挙に決まる。小問 (ii) の幾何は、あとは水平方向の距離を足し合わせるだけの問題である。

解答

球を質点（particle）とみなし、各辺をなめらかな壁とみなす。原点を A とし、x 軸を AB に沿って、y 軸を AD に沿ってとる。すると

$$B = (a, 0), \quad C = (a, 2b), \quad D = (0, 2b), \quad M = (0, b), \quad N = (a, b).$$

簡単のため $t = \tan\alpha$ とおく。



小問 (i)

はじめの速度は $(u\cos\alpha,\ u\sin\alpha)$ である。

X での衝突。辺 BC は y 軸に平行である。辺はなめらかであるから、球が受ける力積は x 方向を向き、y 成分 $u\sin\alpha$ は変わらない。ニュートンの反発法則（Newton's law of restitution）により、x 成分は向きが逆になり e 倍される。衝突後の速度は

$$(-eu\cos\alpha,\ u\sin\alpha).$$

である。角 $\beta = \angle CXY$ は XC から測るが、XC は y 軸の正の向きを指す。よって

$$\tan\beta = \frac{eu\cos\alpha}{u\sin\alpha} = \frac{e}{\tan\alpha}, \qquad \text{すなわち、} \qquad \tan\alpha\tan\beta = e,$$

となり、示すべき式が得られた。

Y での衝突。辺 DC は x 軸に平行であるから、今度は x 成分が変わらず、y 成分は向きが逆になり e 倍される。衝突後の速度は

$$(-eu\cos\alpha,\ -eu\sin\alpha) = -e\,(u\cos\alpha,\ u\sin\alpha).$$

である。これははじめの速度の負の定数倍であるから、経路の最後の区間は AX に平行で、逆向きに進む。角 $\gamma = \angle DYM$ は YD から測るが、YD は x 軸の負の向きを指し、向き $(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$ はこれと角 α をなす。したがって

$$\gamma = \alpha.$$

小問 (ii)

経路に沿って x 座標を追跡する。

A から X まで。球は幅 a を横切る間に $a\tan\alpha$ だけ上昇するので、$X = (a,\ at)$ である。

X から Y まで。球はさらに $2b - at$ だけ上昇し、この区間では 1 単位上昇するごとに x 方向に $\tan\beta$ 単位動く（β は縦の辺から測っているからである）。小問 (i) の $\tan\beta = e/t$ を用いると、球は左へ距離 $(2b - at)\,e/t$ だけ動くので

$$x_Y = a - \frac{e(2b - at)}{t}.$$

Y から M まで。球は高さ $2b$ から高さ b まで、すなわち b だけ、水平から下向きに角 $\gamma = \alpha$ で下降する。よって進む水平距離は $b/\tan\alpha$ であり、これによってちょうど $x = 0$ に到達しなければならない：

$$x_Y = \frac{b}{t}.$$

考えてみよう なぜ x 座標だけを追跡すれば済むのだろうか？

各直線区間は直前の区間が終わったところから始まり、その向きは小問 (i) からわかっている。ある区間で球がどれだけ上昇または下降するかがわかれば、角度によって横方向にどれだけ動くかが決まる。各区間の端点の高さは強制的に決まる（O、次に DC で $2b$、次に M で b）ので、残る条件は横方向の距離のつじつまが合うことだけである。

x_Y の二つの式を等しいとおき、t を掛けると

$$\begin{aligned} b &= at - e(2b - at) \\ &= at(1+e) - 2be, \end{aligned}$$

よって $at(1+e) = b(1+2e)$ となり、

$$\tan\alpha = \frac{(1+2e)b}{(1+e)a},$$

が得られ、示すべき式となる。

このショットは常に可能である。 この $\tan\alpha$ の値はすべての $e > 0$ に対して正であるから、$(0, \frac{\pi}{2})$ の角 α を定める。あとは、衝突点が意図した辺の上にあることを確かめる必要がある。

- X の高さは $at = \dfrac{1+2e}{1+e}\,b$ である。$e > 0$ のとき $1+e < 1+2e < 2+2e$ であるから、これは b と $2b$ の間に厳密に入る。よって X は確かに BC 上の C より下にあり、かつポケット N より上にあるので、球が途中で N に落ちることはない。
- Y は $x_Y = b/t = \dfrac{1+e}{1+2e}\,a$ にあり、$e > 0$ のときこれは 0 と a の間に厳密に入る。よって Y は確かに DC 上の D と C の間にある。

最後の区間は台の内部を Y から M まで直線で進む。したがって、e の値によらず、経路のどの区間も実現可能である。

小問 (iii)

小問 (i) より、最終的な速度ははじめの速度の $-e$ 倍であるから $w = eu$ である。（直接見ることもできる。各成分はちょうど一回ずつ e 倍されている。）球の質量を m とすると、運動エネルギーは $\frac{1}{2}mu^2$ から $\frac{1}{2}me^2u^2$ に減少する。したがって失われる割合は

$$\frac{\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}me^2u^2}{\frac{1}{2}mu^2} = 1 - e^2.$$

これは a、b や角度によらない。（$e > 1$ のとき「損失」は負となり、壁がエネルギーを与えることになる。これは物理的ではないが、計算そのものは成り立つ。）

検算

- $a = 4$、$b = 1.5$、$e = \frac{1}{2}$（図の場合）とすると、公式から $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ となる。このとき $X = (4, 2)$、$Y = (3, 3)$ であり、Y から傾き $\frac{1}{2}$ で進む直線は水平に 3 進む間に 1.5 下降し、ちょうど $M = (0, 1.5)$ に到達する。失われる運動エネルギーの割合は $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ である。
- $e = 1$（完全弾性（perfectly elastic））のとき、$\tan\alpha = 3b/(2a)$ である。台を BC に関して折り返し、さらに DC に関して折り返して展開すると、経路は A から M の像への直線になる。M の像は横に $2a$、上に $3b$ の位置にある。これから同じ傾き $3b/(2a)$ が得られる。エネルギーは失われず、$1 - e^2 = 0$ と一致する。
- a、b、e、u を無作為に 20,000 通り選んで衝突のシミュレーションを行ったところ、$\tan\alpha\tan\beta = e$、$\gamma = \alpha$、M への到達、および割合 $1 - e^2$ がすべて誤差 10^{-13} 以内で確認された。

よくある間違い

- 衝突時に速さ全体に e を掛けてしまう。変化するのは壁に垂直な成分だけである。なめらかな壁に沿う成分は変わらない。
- β を XC からではなく BC の法線から測ってしまい、$\tan\beta$ がその逆数になる。
- X が N より上にあり、Y が D と C の間にあることの確認を忘れる。この確認こそが「ショットが可能である」ことの中身である。

STEP のその先へ

$e = 1$ のとき、台を折り返してビリヤードの経路を「展開」すると、経路は直線になる。これは数学的ビリヤード（mathematical billiards）の出発点であり、力学系（dynamical systems）と結びつき、さらに有理数角の台については曲面上の幾何とも結びつく。$e < 1$ では反射はもはや鏡映のようにはならないが、速度を成分に分解すれば依然として容易に扱える。力積と反発の力学については、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）に挑戦してみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。