解答例

STEP II 2008、第 1 問

純粋数学 ・ 複素反復

> **STEP II 2008、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q1

鍵となる考え方

式 $x^2 - y^2$ と $2xy$ は、$(x + \mathrm{i}y)^2$ の実部（real part）と虚部（imaginary part）である。そこで各点を複素数（complex number）$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ として表すと、2 成分の規則はただ一つの複素定数 c を用いた一つの式 $z_{n+1} = z_n^2 + c$ になる。すると「定数列である」ことや「周期 2 をもつ」ことは、一つの複素数の未知数についての二次方程式（quadratic equation）となり、解の公式（quadratic formula）で解くことができる。

解答

$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$、$c = a + (b+2)\mathrm{i}$ とおく。

$$z_n^2 + c = (x_n^2 - y_n^2 + a) + \mathrm{i}\,(2x_n y_n + b + 2),$$

であり、二つの複素数が等しいのは実部どうし、虚部どうしがそれぞれ等しいときであり、またそのときに限るから、与えられた規則は

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

と同値である。a、b、x_n、y_n は実数であるから、各点 (x, y) にはちょうど一つの複素数が対応し、逆も成り立つ。したがって z を用いて考えても何も失われない。

小問 (i)

$a = 1$、$b = -1$ のとき $c = 1 + \mathrm{i}$ である。数列が定数列（constant sequence）となるのは $z_2 = z_1$ のとき、かつそのときに限る。実際、このとき以降の各段階では同じ計算

が繰り返されるだけである。よって

$$z^2 - z + (1+\mathrm{i}) = 0, \qquad z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1+\mathrm{i})}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3-4\mathrm{i}}}{2}.$$

となればよい。$-3-4\mathrm{i}$ の平方根（square root）を求めるため、p、q を実数として $(p+q\mathrm{i})^2 = -3-4\mathrm{i}$ となるものを探す。すなわち $p^2 - q^2 = -3$ かつ $pq = -2$ である。$(1-2\mathrm{i})^2 = 1 - 4\mathrm{i} - 4 = -3 - 4\mathrm{i}$ であるから、$p = 1$、$q = -2$ が条件を満たす。ゆえに

$$z = \frac{1 \pm (1-2\mathrm{i})}{2} = 1 - \mathrm{i} \quad \text{または} \quad \mathrm{i}.$$

したがって、数列が定数列となるのは

$$(x_1, y_1) = (1, -1) \quad \text{または} \quad (x_1, y_1) = (0, 1).$$

のとき、かつそのときに限る。直接確かめると、$(1,-1) \mapsto (1-1+1,\ -2+1) = (1,-1)$、$(0,1) \mapsto (0-1+1,\ 0+1) = (0,1)$ である。

小問 (ii)

今度は $z_1 = -1 + \mathrm{i}$ であるから、$z_1^2 = 1 - 2\mathrm{i} - 1 = -2\mathrm{i}$ であり、

$$z_2 = c - 2\mathrm{i}.$$

となる。$w = z_2$ とおく。数列が周期（period） 2 をもつのは、$z_3 = z_1$ かつ $z_2 \neq z_1$ のときである。いったん $z_3 = z_1$ となれば、規則により数列は $z_1, z_2, z_1, z_2, \ldots$ と繰り返す。$c = w + 2\mathrm{i}$ を用いると

$$z_3 = w^2 + c = w^2 + w + 2\mathrm{i},$$

であるから、$z_3 = z_1$ は

$$w^2 + w + 2\mathrm{i} = -1 + \mathrm{i} \quad \Longleftrightarrow \quad w^2 + w + (1+\mathrm{i}) = 0.$$

となる。

? **考えてみよう** 未知数として c ではなく $w = z_2$ を選ぶのはなぜか。

条件 $z_3 = z_1$ はどちらを選んでも c の二次方程式になるが、w で表すと、定数列に対応する $w = z_1$ が必ず一つの解になる。つまり二次方程式の解の一つはすでにわかっており、もう一つの解が求めたいものである。実際、$w = -1 + \mathrm{i}$ は $(-1+\mathrm{i})^2 + (-1+\mathrm{i}) + 1 + \mathrm{i} = -2\mathrm{i} + 2\mathrm{i} = 0$ を満たす。解の和は -1 であるから、もう一つの解は $w = -\mathrm{i}$ である。（解の公式からも同じ結果が得られる。$w = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3-4\mathrm{i}}) = \frac{1}{2}(-1 \pm (1-2\mathrm{i}))$ であり、現れる平方根は (i) と同じである。）

- $w = -1 + \mathrm{i} = z_1$ のとき $c = -1 + 3\mathrm{i}$、すなわち $a = -1$、$b = 1$ である。このとき $z_2 = z_1$ であり数列は定数列となるから、周期は 2 ではなく 1 である。
- $w = -\mathrm{i}$ のとき $c = \mathrm{i}$、すなわち $a = 0$ かつ $b + 2 = 1$ である。

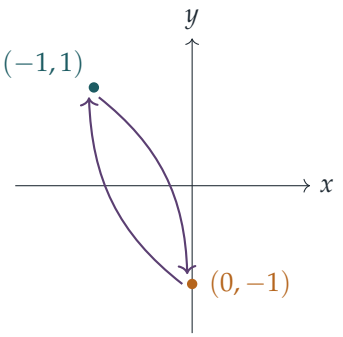
したがって、数列が周期 2 をもつのは

$$a = 0, \qquad b = -1.$$

のとき、かつそのときに限る。座標で確かめると、$a = 0$、$b = -1$ のとき

$$(-1, 1) \mapsto (1 - 1 + 0,\ -2 + 1) = (0, -1) \mapsto (0 - 1 + 0,\ 0 + 1) = (-1, 1),$$

であり、二点は異なるから、周期はちょうど 2 である。



検算

- もとの座標の規則を反復すると、$a = 1$、$b = -1$ のとき $(1, -1)$ と $(0, 1)$ が不動点（fixed point）であること、また $a = 0$、$b = -1$ のとき $(-1, 1) \to (0, -1) \to (-1, 1)$ となることが確かめられる。
- 平方根 $1 - 2\mathrm{i}$ は 2 乗すれば確かめられる。因数分解（factorisation）$w^2 + w + 1 + \mathrm{i} = (w + 1 - \mathrm{i})(w + \mathrm{i})$ も同様に確かめられる。解の積は $(-1 + \mathrm{i})(-\mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}$ である。
- ランダムな初期値から数値的に解を探索したところ、(i) では他の不動点は見つからず、(ii) では定数列を与える $(-1, 1)$ 以外に $z_3 = z_1$ となる (a, b) は見つからなかった。

よくある間違い

- 第 2 成分の「+2」を忘れ、c を $a + (b + 2)\mathrm{i}$ ではなく $c = a + b\mathrm{i}$ としてしまう。

- (ii) の二つ目の答えとして $a = -1$、$b = 1$ を挙げてしまう。この数列は定数列であり、周期は 1 である。
- 実数の座標だけで計算し、連立二次方程式（simultaneous quadratics）の中で迷ってしまう。この方法でも解けるが、複素数の形のほうがはるかに短い。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto z^2 + c$ は、複素力学系（complex dynamics）において最も有名な例である。マンデルブロ集合（Mandelbrot set）とは、0 の軌道（orbit）が有界（bounded）にとどまるような c 全体の集合であり、その最も大きな二つの部分、すなわち主カージオイド（main cardioid）とその左にある円板は、写像が吸引的不動点（attracting fixed point）または吸引的な 2 周期軌道（2-cycle）をもつような c からなる。ここでも、2 周期軌道の方程式には不動点に由来する因数が含まれていた。一般に $(z^2 + c)^2 + c - z = (z^2 - z + c)(z^2 + z + c + 1)$ が成り立つ。この背後にある幾何学への読みやすい入門としては、Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。