解答例

STEP I 2008、第 9 問

力学 ・ 転がる輪の運動量

> **STEP I 2008、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q9

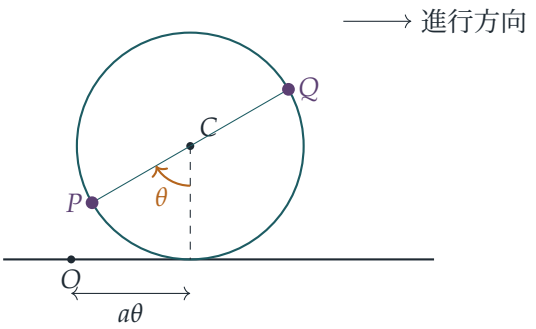
鍵となる考え方

滑らずに転がる（rolling without slipping）という条件によって、並進と回転が結びつく。輪（hoop）が角 θ だけ回転したとき、その中心は距離 $a\theta$、すなわち台に接した縁の長さだけ移動している。したがって各質点（particle）の位置は「中心＋回転する半径」と表され、これを微分すれば速度が得られる。最後の小問では、外力（external forces）が水平成分をもたないので全水平運動量（momentum）は変化しえないこと、そしてその運動量が $\dot{\theta}$ の定数倍になることに注目する。

解答

P の位置と速さ

P と Q を、質量の無視できる輪の上の質点とみなす。原点を P の出発点にとり、x 軸を転がる直線に沿って（輪の進む向きに）、y 軸を鉛直上向きにとる。輪は x 軸の正の向きに転がるものとし、下図では時計回りに回転する。



輪は滑らないので、台の上に転がり出た縁の弧の長さは中心の移動距離に等しい。よって中心 C は $(a\theta,\, a)$ にある。はじめ CP は真下を向いており、時計回りに θ だけ回転した後のベクトル $\overrightarrow{CP}$ は $(-a\sin\theta,\, -a\cos\theta)$ である。したがって

$$\boxed{P = (a\theta - a\sin\theta,\ a - a\cos\theta)}$$

となる（サイクロイド（cycloid））。連鎖律（chain rule）を用いて t で微分すると

$$\dot{x}_P = a\dot{\theta}(1-\cos\theta), \qquad \dot{y}_P = a\dot{\theta}\sin\theta,$$

であるから、

$$v_P^2 = a^2\dot{\theta}^2[(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta] = 2a^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta) = 4a^2\dot{\theta}^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

となる。ここで $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ を用いた。したがって P の速さは

$$v_P = 2a\,|\dot{\theta}\sin\tfrac{1}{2}\theta| \qquad (= 2a\dot{\theta}\sin\tfrac{1}{2}\theta \text{ ただし} 0 \le \theta \le 2\pi,\ \dot{\theta} \ge 0).$$

である。これは θ が 2π の倍数のとき、すなわち P がちょうど接点にあるときに 0 となり、転がり運動の要請と一致する。

運動エネルギー

Q は直径の反対側の端にあるので $\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP}$ であり、

$$Q = (a\theta + a\sin\theta,\ a + a\cos\theta), \qquad \dot{x}_Q = a\dot{\theta}(1+\cos\theta), \quad \dot{y}_Q = -a\dot{\theta}\sin\theta.$$

となる。同様にして

$$v_Q^2 = a^2\dot{\theta}^2[(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta] = 2a^2\dot{\theta}^2(1+\cos\theta) = 4a^2\dot{\theta}^2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta.$$

を得る。輪の質量は無視できるので、運動エネルギー（kinetic energy）は質点のものだけである：

$$T = \tfrac{1}{2}mv_P^2 + \tfrac{1}{2}mv_Q^2 = 2ma^2\dot{\theta}^2(\sin^2\tfrac{1}{2}\theta + \cos^2\tfrac{1}{2}\theta) = 2ma^2\dot{\theta}^2,$$

これが示すべきことであった。

速さが一定であること

外力は質点にはたらく重力 mg と台からの抗力（reaction）であり、いずれも鉛直方向である。よって系にはたらく水平方向の合力は 0 であり、系に対するニュートン（Newton）の運動の第 2 法則から、系の全水平運動量は一定である（輪は質量が無視できるので運動量をもたない）。

考えてみよう 質点は鉛直方向にも運動しているのに、なぜ水平運動量だけで十分なのか。

それは、水平運動量がたまたま $\dot\theta$ だけに依存するからである。水平方向の速度を足し合わせると

$$m\dot x_P + m\dot x_Q = ma\dot\theta(1-\cos\theta) + ma\dot\theta(1+\cos\theta) = 2ma\dot\theta.$$

となる。$\cos\theta$ の項は打ち消し合う。系の重心（centre of mass）は C であり、これは常に速度 $a\dot\theta$ で水平に動くからである。$2ma\dot\theta$ が一定なので $\dot\theta$ は一定であり、輪の速さ（その中心の速さ $a\dot\theta$）は一定である。 □

エネルギーを用いる別解。 P と Q の高さの和は $(a-a\cos\theta)+(a+a\cos\theta)=2a$ であるから、位置エネルギー（potential energy）$2mga$ は決して変化しない。抗力は接点にはたらき、転がり運動では接点は瞬間的に静止しているので、抗力は仕事をしない。したがって $T = 2ma^2\dot\theta^2$ は一定であり、$|\dot\theta|$ は一定である。さらに $\dot\theta$ は連続的に変化し、0 を通らずに一方の符号から他方へ飛び移ることはできないので、$\dot\theta$ 自身が一定である。運動量による議論ではこの最後の段階が不要であり、それが先に運動量の方法を用いた理由である。

検算

- $\theta = \pi$ のとき P は最上点にある。公式から $P = (a\pi, 2a)$、速さは $2a\dot\theta$ となり、中心の速さの 2 倍である。これは転がる車輪の最上点についてよく知られた結果である。
- 運動エネルギーは $\frac{1}{2}(2m)(a\dot\theta)^2 + \frac{1}{2}(2ma^2)\dot\theta^2$ に等しい。すなわち重心の並進運動と、重心のまわりの回転運動の和であり、慣性モーメント（moment of inertia）は $2ma^2$ である。どちらの項も $ma^2\dot\theta^2$ を与える。
- 数値的に、$a = 1.3$、$\dot\theta = 2.1$、$\theta = 1$ として位置を差分で微分すると $v_P^2 + v_Q^2 = 4a^2\dot\theta^2 \approx 29.8$ となり、また $\dot\theta$ が一定のとき P と Q の水平方向の加速度は打ち消し合う。

よくある間違い

- 中心を (a, a) に置いてしまう、あるいは中心が動くことを忘れてしまう。$a\theta$ の項こそが転がり運動の寄与である。
- P の位置で $\sin\theta$ の符号を誤る。P の初速度が 0 であることを確かめるとよい。

- $\dot{\theta}$ の符号が変わりえない理由を述べずに、運動エネルギーが一定であることから速さが一定であると結論してしまう。

STEP のその先へ

これは、系の全運動量は外力によってのみ変化し、内力（internal forces）（ここでは輪が伝える力）は対ごとに打ち消し合う、という一般的な事実の 2 質点の例である。検算で用いた運動エネルギーの分解はケーニッヒ（König）の定理であり、運動エネルギーは重心の運動エネルギーと重心に対する相対運動の運動エネルギーの和に等しいというものである。これは剛体の力学（rigid-body dynamics）の出発点となる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、転がり運動とこれらの考え方を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。