解答例

STEP I 2008、第 8 問

純粋数学 ・ クレロー型微分方程式

> **STEP I 2008、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q8

鍵となる考え方

どちらの方程式も y' を含むが y'' は含まず、変数分離したり直接積分したりできる型ではない。そこで、もう一度微分するのが決め手となる。すると y' だけからなる項が打ち消し合い、残りは y'' を一つの因数とする形に因数分解（factorise）される。各因数がそれぞれ一つの場合を与え、各場合において積分するのではなくもとの方程式に代入し直す。そうすれば任意定数（arbitrary constant）も労せずに決まる。

解答

以下では $p = y'$ と書く。したがって $p' = y''$ である。

小問 (i)

$p^2 - xp + y = 0$ を x で微分する。xp には積の微分法（product rule）を用いる。

$$2p\,y'' - (p + x\,y'') + p = 0 \quad \Longrightarrow \quad y''\,(2p - x) = 0.$$

二つの p の項が打ち消し合うので、各点で $y'' = 0$ または $2y' = x$ が成り立つ。これが示すべきことであった。

$y'' = 0$ の場合。 このとき y' は定数 m であり、$y = mx + c$ となる。$(*)$ に代入すると

$$m^2 - xm + (mx + c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -m^2.$$

よって曲線は直線 $y = mx - m^2$ である。

$2y' = x$ の場合。 $(*)$ に $p = \frac{1}{2}x$ を代入すると

$$\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4y = x^2.$$

考えてみよう なぜ単に $y' = \frac{1}{2}x$ を積分して $y = \frac{1}{4}x^2 + k$ としないのか？

そうしてもよいが、$(*)$ を微分したことで情報の一部が失われている。$y = \frac{1}{4}x^2 + k$ はどれも $2y' = x$ を満たすが、$(*)$ そのものを満たすのは $k = 0$ のときだけである（たとえば $k = 1$ のとき、$x = 0$ で $0 - 0 + 1 \neq 0$ となる）。$(*)$ に直接代入し直せば、すべての情報を一度に用いることになり、定数がそのまま求まる。最初の場合に $c = -m^2$ となった理由も同じ考察で説明できる。

よって曲線は、$c = -m^2$ を満たす直線 $y = mx + c$ であるか、放物線 $4y = x^2$ である。

二つの答えは互いに関連している。直線 $y = mx - m^2$ と $4y = x^2$ の交点は $x^2 - 4mx + 4m^2 = 0$、すなわち $(x - 2m)^2 = 0$ で与えられるので、各直線は点 $(2m, m^2)$ における放物線の接線（tangent）である。放物線はこの直線族の**包絡線**（envelope）なのである。

小問 (ii)

$(x^2 - 1)p^2 - 2xyp + y^2 - 1 = 0$ を x で微分すると

$$2xp^2 + 2(x^2 - 1)p\,y'' - 2yp - 2xp^2 - 2xy\,y'' + 2yp = 0.$$

y'' を含まない項は二つずつ打ち消し合い、

$$2y''[(x^2 - 1)p - xy] = 0.$$

が残る。

$y'' = 0$ の場合。 このとき $y = mx + c$ である。ここで、方程式が

$$(y - xp)^2 = 1 + p^2,$$

と変形できることに気づくと見通しがよい。実際 $(y - xp)^2 - p^2 - 1 = y^2 - 2xyp + (x^2 - 1)p^2 - 1$ である。直線については $y - xp = c$、$p = m$ であるから

$$c^2 = 1 + m^2, \qquad \text{すなわち} \qquad y = mx \pm \sqrt{1 + m^2}.$$

$(x^2 - 1)p = xy$ の場合。 $x^2 \neq 1$ のところでは $p = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$ であるから

$$y - xp = y - \frac{x^2 y}{x^2 - 1} = \frac{-y}{x^2 - 1}.$$

これを $(y - xp)^2 = 1 + p^2$ に代入し、$(x^2 - 1)^2$ を掛けると

$$\begin{aligned} y^2 &= (x^2 - 1)^2 + x^2 y^2 \\ y^2(1 - x^2) &= (1 - x^2)^2 \\ y^2 &= 1 - x^2, \end{aligned}$$

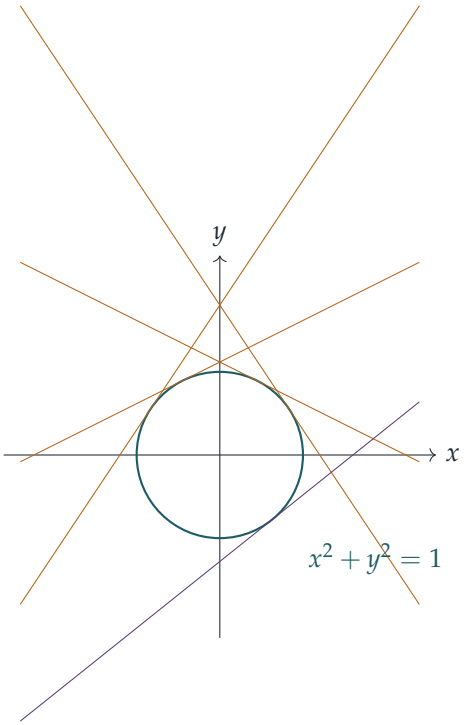
となる（最後は $1-x^2 \neq 0$ で割った）。よって曲線は円 $x^2+y^2=1$ である。（$x=\pm 1$ では、条件 $(x^2-1)p=xy$ から $y=0$ でなければならず、点 $(\pm 1,0)$ が得られるが、これらも同じ円の上にある。）

逆に、この円は実際に方程式を満たす。円の上では $p=-x/y$ であるから $y-xp=(y^2+x^2)/y=1/y$、$1+p^2=(x^2+y^2)/y^2=1/y^2$ となり、両者は一致する。

よって曲線は、$c^2=1+m^2$ を満たす直線 $y=mx+c$ であるか、単位円 $x^2+y^2=1$ である。

考えてみよう 直線 $y=mx\pm\sqrt{1+m^2}$ は円とどのような関係にあるのか？

原点から $y=mx+c$ までの距離は $|c|/\sqrt{1+m^2}$ であり、ここではちょうど 1 である。したがってこれらの直線は、まさに単位円の（y 軸に平行でない）接線である。これは (i) の直線が放物線の接線であったのとまったく同様である。



検算

- (i) で $m=1$ とする。$y=x-1$ では $p=1$ であり、$1-x+x-1=0$ となる。この直線は $(2,1)$ で $4y=x^2$ に接する。

- (ii) で、円上の点 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ では $p = -\frac{3}{4}$ である。このとき $(x^2-1)p^2 - 2xyp + y^2 - 1 = -\frac{16}{25} \cdot \frac{9}{16} + \frac{18}{25} + \frac{16}{25} - 1 = 0$ となる。
- 数値的には、ランダムな三次曲線に沿って両方の導関数の因数分解を確かめ、直線、放物線、円では残差が 0（10^{-13} の精度で）となる一方、$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ や $x^2 + y^2 = 4$ ではそうならないことを確認した。

よくある間違い

- $y' = \frac{1}{2}x$ や $y'' = 0$ を積分して任意定数を残したままにすること。定数はもとの方程式によって決めなければならない。
- $c = \pm\sqrt{1+m^2}$ の $\pm$ を落とすこと。各傾きについて、平行な接線は 2 本ある。

STEP のその先へ

小問 (i) は**クレローの方程式**（Clairaut equation）$y = xp - f(p)$ である。その一般解（general solution）は直線族 $y = mx - f(m)$ であり、さらにこの族の包絡線である**特異解**（singular solution）をもつ。特異解は、定数をどのように選んでも得られない。小問 (ii) も $y = xp \pm \sqrt{1+p^2}$ という同じ現象であり、円が包絡線となっている。特異解の存在は、一階の微分方程式が各点を通る解をただ一つしかもたないとは限らないことを示している。どのようなときに一意性が成り立つかは、常微分方程式（ODE）の最初の講義で学ぶ存在と一意性の定理（existence and uniqueness theorems）の主題である。これについて読むには、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。