解答例

STEP I 2008、第 7 問

純粋数学 • 回転と距離

STEP I 2008、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/08-s1-q7

鍵となる考え方

原点を通る直線への垂線の長さ（perpendicular distance）は、その直線が x 軸に重なるように平面を回転（rotation）させれば容易に求まる。そのとき距離は、新しい y 座標の大きさにすぎない。最初の小問で得る回転の公式は、3 辺のうち 2 辺に対してまさにこの操作を行うものである。最後の小問での工夫は、絶対値（modulus）の記号を外すことである。3 つの符号付き距離（signed distance）の和はつねに同じ定数になり、絶対値をとると和は大きくなることはあっても小さくなることはない。

解答

回転の公式

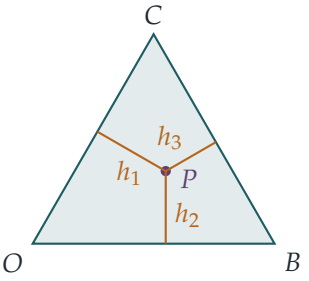
$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ とおく。ここで $r = OP$ であり、θ は x 軸の正の向きから OP までの角である。OP を時計回りに 60° 回転させると、r は変わらず、角は $\theta - 60^\circ$ に変わる。よって新しい y 座標は

$$\begin{aligned} r\sin(\theta - 60^\circ) &= r\sin\theta\cos 60^\circ - r\cos\theta\sin 60^\circ \\ &= \tfrac{1}{2}y - \tfrac{\sqrt{3}}{2}x = \tfrac{1}{2}(y - \sqrt{3}\,x), \end{aligned}$$

となり、題意が示された。反時計回りの回転では角は $\theta + 60^\circ$ となり、同じ展開で $\sin 60^\circ$ の符号を反転させれば、新しい y 座標は

$$\tfrac{1}{2}(y + \sqrt{3}\,x).$$

3 つの距離



h_1。直線 OC は x 軸と $60°$ の角をなす。図全体を O のまわりに時計回りに $60°$ 回転させると、OC は x 軸に重なり、距離は保たれる。回転後の図では、P から x 軸までの距離は新しい y 座標の絶対値であるから、

$$h_1 = \tfrac{1}{2}|\, y - \sqrt{3}\, x\,|.$$

h_2。直線 OB は x 軸であるから、$h_2 = |y|$ である。

h_3。今度は O のまわりに反時計回りに $60°$ 回転させる。この回転により $B = (1,0)$ は $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ に移り、C（角 $60°$ の位置）は角 $120°$ の点、すなわち $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ に移る。したがって直線 BC は水平な直線 $y = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ となり、一方 P の y 座標は $\frac{1}{2}(y + \sqrt{3}\, x)$ となる。ゆえに

$$h_3 = \left|\tfrac{1}{2}(y + \sqrt{3}\, x) - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right| = \tfrac{1}{2}|\, \sqrt{3}\, x + y - \sqrt{3}\,|.$$

（別解：BC の方程式は $\sqrt{3}\, x + y = \sqrt{3}$ であり、点と直線の距離の公式を用いても、$\sqrt{3+1} = 2$ であるから同じ答えが得られる。）

最後の小問

符号付きの量

$$s_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\, x - y), \qquad s_2 = y, \qquad s_3 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{3}\, x - y),$$

を定めると、$i = 1,2,3$ に対して $h_i = |s_i|$ となる。これらを足すと、

$$s_1 + s_2 + s_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, x - \tfrac{1}{2}y + y + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\, x - \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

が**すべての**点 (x,y) に対して成り立つ。

? **考えてみよう** s_1、s_2、s_3 の符号は三角形とどのように関係しているだろうか？

各 s_i は、三角形の 1 辺の上で 0 になる 1 次式である。内部にある重心（centroid）$(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\sqrt{3})$ で調べると、$s_1 = s_2 = s_3 = \frac{1}{6}\sqrt{3} > 0$ となる。よって $s_2 \geq 0$ は OB に関して C を含む側、$s_1 \geq 0$ は OC に関して B を含む側、$s_3 \geq 0$ は BC に関して O を含む側である。周を含む三角形 OBC は、ちょうどこれら 3 つの半平面（half-plane）の共通部分であるから、

$$P \text{ は次の三角形の周上または内部にある：} OBC \iff s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0.$$

さて、任意の実数 s に対して $|s| \geq s$ であり、等号は $s \geq 0$ のとき、かつそのときに限り成り立つ。したがって

$$h_1 + h_2 + h_3 = |s_1| + |s_2| + |s_3| \ \geq\ s_1 + s_2 + s_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

であり、等号が成り立つのは各 i について $|s_i| = s_i$ となるとき、かつそのときに限る。すなわち、3 つの s_i がすべて 0 以上であるとき、かつそのときに限る。前段落より、これはちょうど P が三角形 OBC の周上または内部にあるときに起こる。これで両方向が一度に証明された：

$$h_1 + h_2 + h_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \iff P \text{ は次の三角形の周上または内部にある：三角形} OBC.$$

また、三角形の外部では和は $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ より真に大きいことにも注意しよう。

検算

- 頂点、たとえば $P = B = (1, 0)$ では、$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$、$h_2 = 0$、$h_3 = 0$ で、和は $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ である。正しい。
- 重心では各距離は $\frac{1}{6}\sqrt{3}$ であり、その 3 つの和は $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.8660$、すなわち三角形の高さになる。
- 外部の点 $P = (2, 0)$ では、$h_1 = \sqrt{3}$、$h_2 = 0$、$h_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ で、和は $\frac{3}{2}\sqrt{3} > \frac{1}{2}\sqrt{3}$ である。
- 3 つの公式すべてを、10^5 個のランダムな点で直接計算した点と直線の距離と比較し（10^{-15} の精度で一致）、さらに「必要十分」の主張を、辺上の多数の点を含む 2×10^5 個の点で検証したが、例外はなかった。

よくある間違い

- 回転の向きの符号を間違える。時計回りとは角が**減少する**ことであり、$\theta - 60^\circ$ となる。

- 一方向しか証明しない。三角形の内部で和が $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ になることを確かめるだけでは不十分であり、外部では $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ にならないことも示さなければならない。不等式 $|s| \geq s$ を使えば両方を一度に扱える。
- h_1、h_2、h_3 の絶対値の記号を忘れる。距離が負になることはない。

STEP のその先へ

これはヴィヴィアーニの定理（Viviani's theorem）である：正三角形において、内部の点から各辺までの距離の和は高さに等しい。符号付き距離 s_1, s_2, s_3 は（定数倍を除いて）P の**重心座標**（barycentric coordinates）あるいは**三線座標**（trilinear coordinates）であり、その和はつねに定数で、三角形の内部でちょうどすべてが 0 以上になる。これらは幾何学、コンピュータグラフィックス、凸解析（convex analysis）における標準的な道具である。回転の公式は 2×2 の回転行列（rotation matrix）の第 2 行であり、回転を線形写像（linear map）として捉えるには、ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）がよい手引きとなる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。