解答例

STEP I 2008、第 6 問

純粋数学 • 逆関数と面積

> **STEP I 2008、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q6

鍵となる考え方

逆関数（inverse function）のグラフは、もとのグラフを直線 $y = x$ に関して折り返したものである。したがって g を y について積分したものは、曲線 $y = \mathrm{f}(x)$ と y 軸の間の、横向きに測った面積になる。上端 k は偶然の値ではなく、ちょうど $\mathrm{f}(\frac{1}{2})$ に等しい。このことに気づけば、二つの面積が組み合わさって一つの長方形を埋めることがわかる。

解答

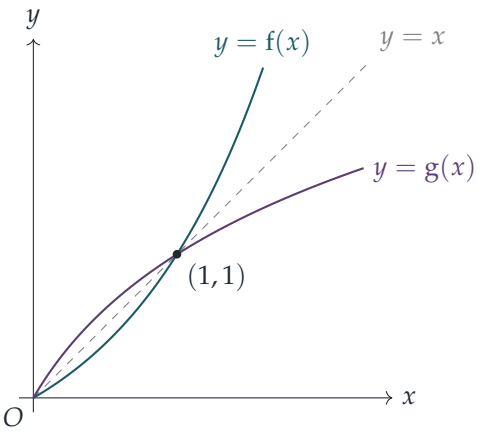
グラフの概形

関数 f は増加関数で、$\mathrm{f}(0) = 0$、$\mathrm{f}(1) = 1$ である。$\mathrm{f}''(x) = \mathrm{e}^x/(\mathrm{e}-1) > 0$ であるから下に凸（convex）であり、原点における傾きは $\mathrm{f}'(0) = 1/(\mathrm{e}-1) \approx 0.58 < 1$ である。よって $0 < x < 1$ では曲線は直線 $y = x$ の下側にあり、点 $(1,1)$ でその直線と交わり、その後は指数関数的に増加する。

g を求めるために、$y = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}-1}$ を x について解くと、f の値域は $[0,\infty)$ であるから

$$\mathrm{g}(x) = \ln(1 + (\mathrm{e}-1)x), \qquad x \geq 0,$$

となる。そのグラフは $y = \mathrm{f}(x)$ を $y = x$ に関して折り返したものである。すなわち、傾き $\mathrm{e}-1 \approx 1.72$ で $(0,0)$ を通り、上に凸（concave）で、$(1,1)$ で $y = x$ と交わり、その後は対数的にしか増加しない。



一つ目の積分

$$\int_0^{1/2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big[\mathrm{e}^x - x\Big]_0^{1/2} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big(\sqrt{\mathrm{e}} - \tfrac{1}{2} - 1\Big) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}} - \frac{3}{2}}{\mathrm{e}-1}.$$

二つ目の積分

まず、平方の差の因数分解（difference of two squares）$\mathrm{e}-1 = (\sqrt{\mathrm{e}})^2 - 1$ を用いると

$$\mathrm{f}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}-1} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{(\sqrt{\mathrm{e}}-1)(\sqrt{\mathrm{e}}+1)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}+1} = k,$$

となることに注意する。言い換えれば $\mathrm{g}(k) = \frac{1}{2}$ であり、$1 + (\mathrm{e}-1)k = 1 + (\sqrt{\mathrm{e}}-1) = \sqrt{\mathrm{e}}$ である。

考えてみよう $\ln(1 + (\mathrm{e}-1)x)$ はどのように積分すればよいか？

$u = 1 + (\mathrm{e}-1)x$ と置換（substitution）すると $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/(\mathrm{e}-1)$ であり、積分区間は $u = 1$ から $u = \sqrt{\mathrm{e}}$ までとなる。さらに $\int \ln u\,\mathrm{d}u = u\ln u - u$（$\ln u$ と 1 の積とみた部分積分（integration by parts））を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^k \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \ln u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big[u\ln u - u\Big]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big(\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt{\mathrm{e}} - (0-1)\Big) = \frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1},\end{aligned}$$

となる。ここで $\ln\sqrt{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$ を用いた。

和をとる

$$\int_0^{1/2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{k} \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\mathrm{e}} - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{\mathrm{e}}-1)}{(\sqrt{\mathrm{e}}-1)(\sqrt{\mathrm{e}}+1)} = \frac{1}{2(\sqrt{\mathrm{e}}+1)},$$

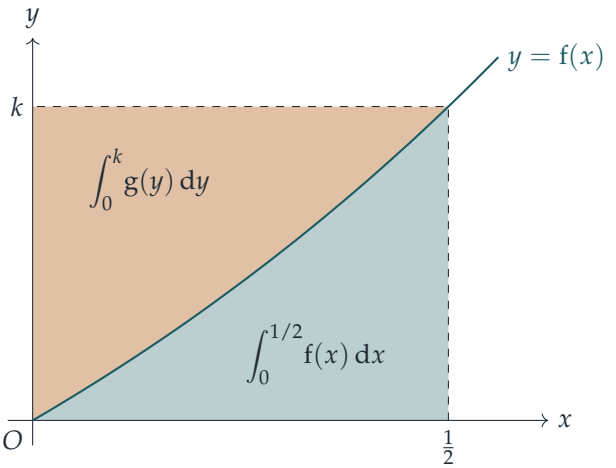
となり、示すべき式が得られた。

結果の説明

答えは $\frac{1}{2} \times k$ であり、これは $(0,0)$ と $(\frac{1}{2},k)$ を対角の頂点とする長方形の面積である。その理由を説明しよう。

考えてみよう $\int_0^k \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$ は f のグラフ上のどこに現れるか？

$y = x$ に関する折り返しは面積を保つ。$0 \le x \le k$ における $y = \mathrm{g}(x)$ の下側の領域は、折り返すと、$0 \le y \le k$ における曲線 $y = \mathrm{f}(x)$ と y 軸の間の領域に移る。言い換えれば、これは曲線 $y = \mathrm{f}(x)$ に沿った $\int_0^k x\,\mathrm{d}y$、すなわち曲線の**左側**の面積である。$\mathrm{f}(\frac{1}{2}) = k$ であるから、曲線は長方形の頂点 $(0,0)$ から頂点 $(\frac{1}{2},k)$ まで延びており、長方形を二つの部分に分ける。曲線の下側の部分（一つ目の積分、青緑色）と、曲線の左側の部分（二つ目の積分、琥珀色）である。



したがって、二つの積分を合わせると長方形全体になり、その面積は $\frac{1}{2}k = \frac{1}{2(\sqrt{\mathrm{e}}+1)}$ である。同じ図から、$\mathrm{f}(0) = 0$ を満たす増加関数について一般に

$$\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\mathrm{f}(a)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = a\,\mathrm{f}(a).$$

が成り立つことがわかる。

検算

数値的には、一つ目の積分はおよそ 0.08655、二つ目はおよそ 0.10222 である。それぞれにシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、厳密な値と小数第 12 位まで一致し、その和 0.18877 は $1/(2(\sqrt{\mathrm{e}}+1))$ に等しい。グラフの概形の妥当性の確認として、二つの部分はどちらも正であり、青緑色の部分のほうが小さい。これは当然であって、下に凸な曲線は長方形の対角線より下に垂れ下がっているからである。

よくある間違い

- $k = \mathrm{f}(\frac{1}{2})$ であることに気づかず、そのために $1 + (\mathrm{e}-1)k = \sqrt{\mathrm{e}}$ という簡約を見逃す。
- 原点付近で f のグラフを $y = x$ より上に描いてしまう。そこでの傾きは $1/(\mathrm{e}-1) < 1$ である。
- 図において、$y = \mathrm{g}(x)$ の下側の面積を別の図に塗るだけで、それが $y = \mathrm{f}(x)$ の横の領域とどう関係するかを述べない。要点は、折り返しによって一方が他方に移るということである。

STEP のその先へ

恒等式 $\int_0^a \mathrm{f} + \int_0^{\mathrm{f}(a)} \mathrm{f}^{-1} = a\,\mathrm{f}(a)$ は、**ヤングの不等式**（Young's inequality）の等号成立の場合である。ヤングの不等式とは、任意の $b \geq 0$ に対して $\int_0^a \mathrm{f} + \int_0^b \mathrm{f}^{-1} \geq ab$ が成り立つというものである。$\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$ とおくと、$1/p + 1/q = 1$ のもとで $ab \leq a^p/p + b^q/q$ が得られ、これは解析学におけるヘルダー（Hölder）の不等式の出発点となる。このような積分がどのように厳密に扱われるかを知るには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。