解答例

STEP I 2008、第 5 問

純粋数学 • 多項式の評価

> **STEP I 2008、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q5

鍵となる考え方

$n = 1$ のとき多項式は直線であり、区間の両端での値は互いに結びついている。両者の差はちょうど 2 なので、両方とも小さくなることはできない。小問 (ii) での工夫は、最高次の係数で割ることで、チェビシェフ（Chebyshev）の定理がその曲線自体に適用できるようにすることである。すると定理により、$[-1, 1]$ のどこかで $|y|$ が大きくならなければならない。一方、端点での値は小さい。両端点での値よりも高く上る（あるいは両方よりも低く下がる）曲線は、その間のどこかで向きを変えなければならない。

解答

小問 (i)

$n = 1$ の場合。このとき $\mathrm{p}(x) = x + a_0$ であり、$M \geq 2^0 = 1$ を示せばよい。M は $[-1, 1]$ の任意の点における $|\mathrm{p}|$ の値以上であるから、とくに端点での値以上である：

$$M \geq |\mathrm{p}(1)| = |1 + a_0| \quad \text{かつ} \quad M \geq |\mathrm{p}(-1)| = |a_0 - 1|.$$

これらを足し合わせ、三角不等式（triangle inequality）$|u| + |v| \geq |u - v|$ を用いると

$$2M \geq |1 + a_0| + |a_0 - 1| \geq |(1 + a_0) - (a_0 - 1)| = 2,$$

となるので、$M \geq 1 = 2^{1-n}$ であり、$n = 1$ のときに定理が証明された。（$\mathrm{p}(x) = x$ のとき等号が成り立つので、この評価はこれ以上改善できない。）

(a) $\mathrm{p}(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ かつ $|x| \leq 1$ のとき $0 \leq x^2 \leq 1$ であるから、$-\frac{1}{2} \leq \mathrm{p}(x) \leq \frac{1}{2}$ である。

値 $\frac{1}{2}$ は $x = \pm 1$ で（$-\frac{1}{2}$ は $x = 0$ で）とられるので、

$$M = \tfrac{1}{2} = 2^{1-2}.$$

定理は等号で成り立つ。

(b) $\mathrm{p}(x) = x^3 - x$ に対しては $M \geq 2^{1-3} = \frac{1}{4}$ を示せばよい。$|\mathrm{p}| \geq \frac{1}{4}$ となる点を一つ見つければ十分である。停留点（stationary point）は $3x^2 - 1 = 0$ となる点、すなわち $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ であり、どちらも $[-1, 1]$ に含まれ、

$$\mathrm{p}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$\mathrm{p}(\pm 1) = 0$ であるから、これは実際に最大値である：$M = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.385$。電卓を使わずに $\frac{1}{4}$ と比較するには、両辺を 2 乗すればよい：

$$\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{27} > \frac{4}{64} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

よって $M > \frac{1}{4}$ であり、定理は成り立つ（今回は十分な余裕をもって）。

小問 (ii)

$f(x) = 64x^5 + 25x^4 - 66x^3 - 24x^2 + 3x + 1$ とおく。チェビシェフの定理は最高次の係数が 1 の多項式についての定理であるから、

$$\mathrm{p}(x) = \tfrac{1}{64} f(x) = x^5 + \tfrac{25}{64}x^4 - \tfrac{66}{64}x^3 - \tfrac{24}{64}x^2 + \tfrac{3}{64}x + \tfrac{1}{64},$$

に適用する。これは $n = 5$ として要求される形をしている。定理より $\max_{|x|\leq 1} |\mathrm{p}(x)| \geq 2^{-4} = \frac{1}{16}$ であり、64 を掛けると

$$\max_{|x|\leq 1} |f(x)| \geq 4.$$

したがって、$|f(x_0)| \geq 4$ となる $x_0 \in [-1, 1]$ が存在する。

次に端点を調べる：

$$f(1) = 64 + 25 - 66 - 24 + 3 + 1 = 3,$$
$$f(-1) = -64 + 25 + 66 - 24 - 3 + 1 = 1.$$

どちらも絶対値は 4 より小さいので、x_0 は端点ではない：$-1 < x_0 < 1$。

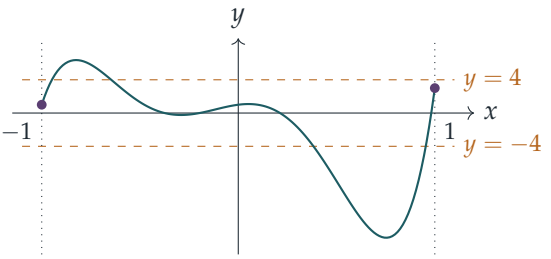
考えてみよう 区間の内部で $|f|$ が大きくなることはわかった。なぜそれによって極値点の存在が導かれるのだろうか？

二つの場合がある。

- $f(x_0) \geq 4$ ならば、$f(x_0)$ は $f(-1) = 1$ と $f(1) = 3$ のどちらよりも大きい。連続関数 f は閉区間 $[-1, 1]$ 上で最大値をとる。この値は $f(x_0) \geq 4$ 以上なので、どちらの端点でもとられない。したがって内部の点でとられ、その点は f の極大点である。
- $f(x_0) \leq -4$ ならば、$f(x_0)$ は両端点での値よりも小さく、同様にして $[-1, 1]$ 上の f の最小値は内部の点でとられ、その点は極小点である。

いずれにしても、f は開区間 $(-1, 1)$ の内部に極大点または極小点をもつ。そこでは $f' = 0$ であり、f は定数でない多項式なので、f' の零点は有限個しかない。よって f' はその点のすぐ左側で一定の符号を保ち、すぐ右側でも一定の符号を保つ。その点は極大点または極小点であるから、これらの符号は逆でなければならず、したがってそれは真の極値点（turning point）である。以上より、曲線は $-1 \leq x \leq 1$ の範囲に少なくとも一つの極値点をもち、題意が示された。

4 次方程式 $f'(x) = 0$ を一度も解く必要がなかったことに注意しよう。それこそがこの問題の要点である。



この図は $[-1, 1]$ 上の曲線を示している。両端点での値はどちらも破線 $y = \pm 4$ の間にあるが、曲線はその帯の外に出ている。実際、この曲線は区間内に四つの極値点をもち、最も深いものは $x \approx 0.75$ 付近で $y \approx -15$ である。

検算

- $n = 1$ について、a_0 にいくつかの値を代入してみると、$\max(|1 + a_0|, |1 - a_0|)$ は決して 1 を下回らず、1 に等しくなるのは $a_0 = 0$ のときだけであることがわかる。
- (b) では $\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.3849$ であり、0.25 を十分に上回る。細かい格子点で $x^3 - x$ の値を調べると、これが $|x^3 - x|$ の最大値であることが確かめられる。
- (ii) では、$[-1, 1]$ 上で f を数値的に走査すると $\max |f| \approx 15.0$（$x \approx 0.753$ において $f \approx -15.0$）となり、保証されている 4 を大きく上回る。また、f' が $x \approx -0.825, -0.292, 0.052, 0.753$ で符号を変えることもわかる。

よくある間違い

- 定理を f に直接適用してしまうこと。f の最高次の係数は 1 ではなく 64 なので、まず 64 で割らなければならない。評価は $64 \cdot 2^{-4} = 4$ となる。
- 「どこかで $|f| \geq 4$」で止まってしまうこと。それだけでは極値点の存在は導かれない。最大値または最小値が区間の内部でとられることを示すには、端点での値 1 と 3 が必要である。
- (b) で $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ と $\frac{1}{4}$ を不注意に比較すること。正の数どうしを 2 乗すれば、比較は厳密になる。

STEP のその先へ

チェビシェフの定理で等号が成り立つのは、ちょうど $2^{1-n}T_n(x)$ の場合である。ここで T_n は $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ で定義されるチェビシェフ多項式（Chebyshev polynomial）である。小問 (a) は $\frac{1}{2}T_2$ であり、$n = 1$ の場合は $T_1(x) = x$ である。これらの多項式は近似理論（approximation theory）の出発点であり、補間（interpolation）が等間隔の点よりもチェビシェフ節点（Chebyshev nodes）で最もよく機能する理由を説明する。小問 (ii) の議論は最大値・最小値の定理（extreme value theorem、閉区間上の連続関数は最大値と最小値をとる）を用いており、この定理は解析学の最初の講義で丁寧に証明される。アボット（Abbott）の *Understanding Analysis*（『解析学入門』）は、その証明を読むのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。