解答例

STEP I 2008、第 4 問

純粋数学 ・ 凸関数

> **STEP I 2008、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q4

鍵となる考え方

どちらの関数も指数関数（exponential）$\mathrm{e}^{h(x)}$ の形をしており、2 回微分すると $(h''+(h')^2)\mathrm{e}^h$ となる。指数関数の因子はつねに正であるから、凸性（convexity）は $h''+(h')^2$ の符号、すなわち純粋に三角関数の不等式に帰着する。(i) では、この不等式がちょうど描くよう求められている 2 曲線の比較になっている。(ii) では、$\sin 2x$ と $\sin 2\alpha$ の比較に簡約される。

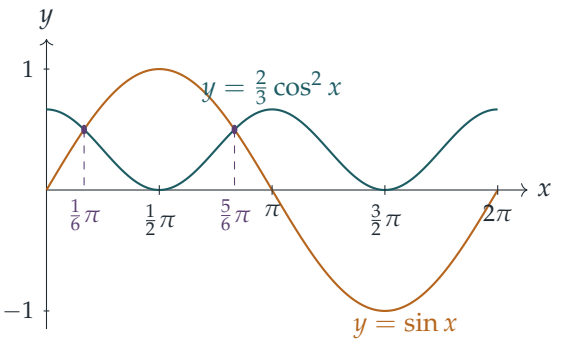
解答

小問 (i)

グラフ。 曲線 $y=\frac{2}{3}\cos^2 x$ は 0 と $\frac{2}{3}$ の間にある。$x=0,\pi,2\pi$ で $\frac{2}{3}$ に等しく、$x=\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi$ で x 軸に接し、周期（period）は π である。曲線 $y=\sin x$ はおなじみの正弦曲線である。交点を求めるため、$s=\sin x$、$\cos^2 x=1-s^2$ とおくと

$$\tfrac{2}{3}(1-s^2)=s \iff 2s^2+3s-2=0 \iff (2s-1)(s+2)=0.$$

$s=-2$ はありえないので $\sin x=\frac{1}{2}$ であり、2 曲線は $x=\frac{1}{6}\pi$ と $x=\frac{5}{6}\pi$ でのみ交わる。$(\pi,2\pi)$ では正弦曲線は負であり、もう一方の曲線は非負であるから、そこに交点はない。



f の凸性。 $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sin x}$ とすると、合成関数の微分法（chain rule）により $f'(x) = \frac{2}{3}\cos x\, f(x)$ であり、さらに積の微分法（product rule）により

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\tfrac{2}{3}\sin x\, f(x) + \tfrac{2}{3}\cos x\, f'(x) \\ &= f(x)\left(\tfrac{4}{9}\cos^2 x - \tfrac{2}{3}\sin x\right) \\ &= \tfrac{2}{3}f(x)\left(\tfrac{2}{3}\cos^2 x - \sin x\right). \end{aligned}$$

考えてみよう なぜ括弧の中身だけですべてが決まるのか。

$f(x)$ は指数関数なので狭義に正であり、したがって $f''(x) \geq 0$ となるのは $\frac{2}{3}\cos^2 x \geq \sin x$ のときであり、かつそのときに限る。言い換えれば、f が凸（convex）となるのは、ティール色の曲線が琥珀色の曲線と重なるか、その上方にある範囲にちょうど一致する。問題が先にグラフを描かせるのはこのためである。

グラフと先に求めた交点から、$0 < x \leq \frac{1}{6}\pi$ および $\frac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi$ において $\frac{2}{3}\cos^2 x \geq \sin x$ である。$\frac{1}{6}\pi$ と $\frac{5}{6}\pi$ の間では正弦曲線のほうが上にある（たとえば $x = \frac{1}{2}\pi$ では、2 つの値は 0 と 1 である）。よって f は

$$0 < x \leq \tfrac{1}{6}\pi \qquad \text{および} \qquad \tfrac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi,$$

で凸であり、これより広い区間では凸ではない。（$f'' = 0$ となる端点 $\frac{1}{6}\pi$ と $\frac{5}{6}\pi$ を含めるかどうかは好みの問題である。）

小問 (ii)

$g(x) = \mathrm{e}^{-k\tan x}$ とすると $g'(x) = -k\sec^2 x\, g(x)$ である。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^2 x = 2\sec^2 x\tan x$ と積の微分法を用いると

$$\begin{aligned} g''(x) &= -2k\sec^2 x\tan x\, g(x) - k\sec^2 x\, g'(x) \\ &= g(x)\left(k^2\sec^4 x - 2k\sec^2 x\tan x\right) \\ &= k\sec^2 x\, g(x)\left(k\sec^2 x - 2\tan x\right). \end{aligned}$$

ここで $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$ より $k = \sin 2\alpha > 0$ であり、また $\sec^2 x > 0$、$g(x) > 0$ である。よって $g''(x) \geq 0$ となるのは $k\sec^2 x \geq 2\tan x$ のときであり、かつそのときに限る。両辺に $\cos^2 x > 0$ を掛けると、これは

$$k \geq 2\tan x\cos^2 x = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$$

となる。したがって g が凸となるのは、ちょうど

$$\sin 2x \leq \sin 2\alpha.$$

となる範囲である。

考えてみよう $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ のとき、$\sin 2x \leq \sin 2\alpha$ となるのはどこか。

x が $(0, \frac{1}{2}\pi)$ を動くとき、$2x$ は $(0, \pi)$ を動く。この区間で sin は $\frac{1}{2}\pi$ まで増加し、その後減少し、$\frac{1}{2}\pi$ に関して対称である。値 $\sin 2\alpha$（ただし $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$）をとるのは $2x = 2\alpha$ と $2x = \pi - 2\alpha$ においてである。よって $\sin 2x \leq \sin 2\alpha$ となるのは、$2x \leq 2\alpha$ または $2x \geq \pi - 2\alpha$ のときであり、かつそのときに限る。すなわち

$$0 < x \leq \alpha \qquad \text{または} \qquad \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \leq x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

特に、$0 < x < \alpha$ のとき $0 < 2x < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$ であり、そこで sin は増加するので、$\sin 2x < \sin 2\alpha = k$ となって $g''(x) > 0$ である。ゆえに、求められているとおり、g は $0 < x < \alpha$ で凸である。

もう一方の区間は

$$\tfrac{1}{2}\pi - \alpha < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

である。$\alpha < \frac{1}{4}\pi$ より $\frac{1}{2}\pi - \alpha > \frac{1}{4}\pi > \alpha$ となるので、これは 1 つ目の区間とは確かに異なる。その間の区間 $\alpha < x < \frac{1}{2}\pi - \alpha$ では、g は凸ではない。

検算

- $x = \frac{1}{6}\pi$ では $\frac{2}{3}\cos^2 x = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \sin x$ であるから、そこで $f'' = 0$ となる。境界点ではそうなるべきである。

- (ii) では、$\sin 2x$ が変わらないので、問題は $x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$ に関して対称である。2 つ目の区間が 1 つ目の区間の鏡像になっているのはこのためである。
- 数値的には、$\alpha = 0.5$（$k \approx 0.841$）のとき、差分（finite difference）による g の第 2 次導関数（second derivative）の近似値は $x = 0.3$ と $x = 1.3$ で正、$x = 0.8$ で負である。$\frac{1}{2}\pi - \alpha \approx 1.071$ なので、これは求めた区間と一致する。多数のランダムな α と x についてコンピュータで調べたところ、両方の小問の結果と一致した。

よくある間違い

- $\mathrm{e}^{h(x)}$ を 2 回微分するときに $(h')^2$ の項を忘れること。第 2 次導関数は単に $h''\mathrm{e}^h$ ではない。
- (i) で $(\pi, 2\pi)$ 全体を見落とすこと。そこでは $\sin x < 0 \leq \frac{2}{3}\cos^2 x$ であるから、f は $\frac{5}{6}\pi$ から 2π までずっと凸である。
- $\sin 2x \leq \sin 2\alpha \Rightarrow x \leq \alpha$ で止めてしまうこと。sin は $(0, \pi)$ で単調（monotonic）ではないので、これでは 2 つ目の区間が失われる。

STEP のその先へ

第 2 次導関数による判定は、凸性の一つの側面にすぎない。本来の定義は幾何的なもので、どの弦（chord）もグラフと重なるかその上方にある、というものである。微分可能な関数については、これは f' が増加関数であることと同値であり、さらにイェンセンの不等式（Jensen's inequality）へとつながる。この不等式は相加相乗平均の不等式（AM–GM）の基礎であり、確率論や最適化（optimisation）の多くの部分を支えている。凸関数については Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）で丁寧に扱われている。Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、STEP 形式の演習問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。