解答例

STEP I 2008、第 3 問

純粋数学 ・ 並べ替えによる不等式

> **STEP I 2008、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q3

鍵となる考え方

不等式 $(*)$ は、実は二つの非負の因数の積が姿を変えたものにすぎない。これが得られれば、以降の不等式はすべて、$(*)$ の両辺が示したい不等式の両辺になるように a, b, c, d を選び、しかも条件 $c \geq a$ と $d \geq b$ が本当に成り立つことを確かめるだけの問題になる。示すべき不等式は対称（symmetric）なので、まず変数を大きさの順に並べてよく、その順序づけこそがこれらの条件を保証してくれるのである。

解答

$(*)$ の証明

すべてを一方の辺に移項して因数分解（factorise）する：

$$ab + cd - bc - ad = a(b-d) - c(b-d) = (c-a)(d-b).$$

$c \geq a$ かつ $d \geq b$ ならば、二つの因数はともに非負であるから、その積も非負である。よって $ab + cd \geq bc + ad$ であり、等号が成り立つのはちょうど $c = a$ または $d = b$ のときである。

小問 (i)

2 変数の場合。 $x \geq y$ と仮定する。$(*)$ において

$$a = y, \quad b = y, \quad c = x, \quad d = x.$$

とおく。条件 $c \geq a$ と $d \geq b$ はどちらも $x \geq y$ を意味し、これは仮定されている。このとき $ab + cd = y^2 + x^2$, $bc + ad = xy + xy$ であるから、$(*)$ より

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

を得る。

3 変数の場合。さらに $x \geq z$ かつ $y \geq z$ と仮定する。

$$a = z, \quad b = z, \quad c = x, \quad d = y.$$

とおく。ここで $c \geq a$ は $x \geq z$、$d \geq b$ は $y \geq z$ であり、どちらも仮定されている。このとき $ab + cd = z^2 + xy$, $bc + ad = zx + zy$ であるから

$$z^2 + xy \geq xz + yz.$$

これを $x^2 + y^2 \geq 2xy$（$x \geq y$ なので使ってよい）に加えると

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy \geq 2xy + xz + yz,$$

となり、両辺から xy を引くと

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

を得る。ここまでで証明できたのは $x \geq y \geq z$ の場合だけである。

考えてみよう $x \geq y \geq z$ の場合にしか証明していない結果から、どうすればすべての x, y, z に対する結果が得られるだろうか？

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ の両辺はともに対称である。すなわち、どの二つの変数を入れ替えても各辺は変わらない。任意の実数 x, y, z が与えられたとき、それらを大きい順に $X \geq Y \geq Z$ と並べる。いま示したことから $X^2 + Y^2 + Z^2 \geq XY + YZ + ZX$ が成り立つ。しかしこれは x, y, z についての不等式と同じものであり、項の順序が違うだけである。したがって、この不等式はすべての実数 x, y, z について成り立つ。

（等号が成り立つには、足し合わせた二つの不等式の両方で等号が成り立つ必要があり、そのためには $x = y = z$ でなければならない。）

小問 (ii)

この式は、それぞれが数とその逆数（reciprocal）の和である三つの組の和である：

$$\left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s}\right) + \left(\frac{t}{r} + \frac{r}{t}\right) + \left(\frac{r}{s} + \frac{s}{r}\right).$$

したがって、任意の正の数 p, q に対して $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} \geq 2$ を示せば十分である。これは $x^2 + y^2 \geq 2xy$ に相当するものである。

式 $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}$ は p と q について対称であるから、$p \geq q > 0$ となるように名前をつけてよい。$(*)$ において

$$a = q, \quad b = \frac{1}{p}, \quad c = p, \quad d = \frac{1}{q}.$$

とおく。すると $c \geq a$ は $p \geq q$ であり、$d \geq b$ は $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p}$ である。後者も、p と q が正であることから $p \geq q$ より従う。このとき

$$ab + cd = \frac{q}{p} + \frac{p}{q}, \qquad bc + ad = \frac{p}{p} + \frac{q}{q} = 2,$$

であるから、$(*)$ より $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} \geq 2$ を得る。

これを組 $(s,t), (t,r), (r,s)$ に適用し、三つの結果を足し合わせると、すべての正の数 r, s, t に対して

$$\frac{s}{t} + \frac{t}{r} + \frac{r}{s} + \frac{t}{s} + \frac{r}{t} + \frac{s}{r} \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

が成り立ち、求める結果が得られた。各組でその二つの数が等しくなる必要があるから、等号が成り立つのはちょうど $r = s = t$ のときである。

検算

- 小問 (i) で $x = 3, y = 1, z = -2$ を試してみる。左辺は 14、右辺は $3 - 2 - 6 = -5$ である。三つの値を並べ替えても両辺は変わらず、これは対称性による議論が必要とする通りである。
- 小問 (i) の別証明：$2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$。
- $r = 2, s = 1, t = 1$ のとき、小問 (ii) の式は $1 + \frac{1}{2} + 2 + 1 + 2 + \frac{1}{2} = 7 \geq 6$ である。コンピュータで 20,000 個のランダムな厳密有理数の場合についてすべての段階を確かめたところ、反例は見つからなかった。また、$r = 1.001, s = 1, t = 0.999$ のような値では、和は 6 をわずかに上回る。

よくある間違い

- $c \geq a$ と $d \geq b$ を確かめずに $(*)$ を使うこと。文字の割り当てを誤ると、不等号の向きが逆になることがある。
- 小問 (ii) で、$\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p}$ が正であることを使っている点を忘れること。負の数の場合、逆数をとっても同じようには大小が逆転しない。
- 小問 (i) を $x \geq y \geq z$ の場合についてだけ証明し、対称性から一般の場合が導かれる理由を説明しないこと。

STEP のその先へ

不等式 $(*)$ は**並べ替え不等式**（rearrangement inequality）の 2 項の場合である。これは、二つの数の列がそれぞれ大きさの順に並んでいるとき、積の和は同じ順序で組にしたときに最大となり、逆の順序で組にしたときに最小となる、という不等式である。ここでの二つの結果も、2 項の相加相乗平均の不等式（AM–GM）も、そこからただちに導かれる。また、チェビシェフ（Chebyshev）の和の不等式とも密接に関係している。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 向け問題集）には STEP 形式の不等式の演習がさらに載っており、Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）では、このような順序に関する議論が解析学をどのように支えているかが示されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。