解答例

STEP I 2008、第 2 問

純粋数学 • 置換積分

> **STEP I 2008、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q2

鍵となる考え方

この置換（substitution）は、平方根（square root）が単純な式 $t-x$ になるように選ばれている。x について解いて煩雑な商を微分するのではなく、両辺を 2 乗して根号を消し、得られた関係式を陰関数微分（implicit differentiation）する。導関数にはちょうど因子 $t-x$ が現れ、これが被積分関数（integrand）の平方根と打ち消し合うので、積分は $\int \frac{1}{t+b}\,\mathrm{d}t$ に帰着する。最後の小問は、その約分と割り算がどのような場合に正当化されるかを問うものである。

解答

導関数

$R=\sqrt{x^2+2bx+c}$ とおくと、$t-x=R$ である。両辺を 2 乗すると、

$$t^2-2tx+x^2=x^2+2bx+c \quad\Longrightarrow\quad t^2-2tx-2bx-c=0.$$

これを t で微分すると（x は t の関数とみる）、

$$2t-2x-2t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0, \qquad \text{よって} \qquad (t+b)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=t-x.$$

$t+b$ で割るには、これが 0 でないことが必要である。$b^2<c$ より

$$x^2+2bx+c=(x+b)^2+(c-b^2)>(x+b)^2,$$

であるから $R>|x+b|$ となり、したがって

$$t+b=(x+b)+R>(x+b)+|x+b|\geq 0.$$

ゆえに、すべての x に対して $t+b>0$ であり、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{t-x}{t+b},$$

が示された。（2乗した関係式を直接解くこともできる。$x=\dfrac{t^2-c}{2(t+b)}$ であり、これを微分しても、いくらか式変形すれば同じ結果が得られる。）

積分

2次式（quadratic）$x^2+2bx+c$ はすべての x に対して正であるから、被積分関数はいたるところで定義される。置換し、$R=t-x$ を用いると、

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2bx+c}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{t-x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t-x}\cdot\frac{t-x}{t+b}\,\mathrm{d}t\\&=\int\frac{1}{t+b}\,\mathrm{d}t=\ln(t+b)+C,\end{aligned}$$

となる。ここで $t+b>0$ であるから絶対値（modulus）は不要である。また $R>0$ であるから、$t-x=R$ の約分も問題ない。x に戻すと、

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2bx+c}}\,\mathrm{d}x=\ln\left(x+b+\sqrt{x^2+2bx+c}\right)+C.$$

これは微分して確かめることができる。$x+b+R$ の導関数は $1+\dfrac{x+b}{R}=\dfrac{R+x+b}{R}$ であり、これを $x+b+R$ で割ると $\dfrac{1}{R}$ が残る。

$b^2=c$ の場合

このとき $x^2+2bx+c=(x+b)^2$ であるから $\sqrt{x^2+2bx+c}=|x+b|$ となり、被積分関数は $\dfrac{1}{|x+b|}$ である（$x\neq -b$ で定義される）。

考えてみよう なぜ $\sqrt{(x+b)^2}$ は単に $x+b$ とはならないのか？

根号の記号は負でない方の平方根を表すので、$\sqrt{(x+b)^2}=|x+b|$ であり、$x+b<0$ のときこれは $-(x+b)$ に等しい。この符号こそが、公式が成り立ち続けるかどうかを決めるのである。

$x+b>0$ の場合：直接計算すると、

$$\int\frac{1}{x+b}\,\mathrm{d}x=\ln(x+b)+C.$$

公式からは

$$\ln\left(x+b+(x+b)\right)=\ln 2+\ln(x+b),$$

が得られ、直接計算の結果とは定数 $\ln 2$ だけしか違わない。したがって、結果は依然として成り立つ。

$x+b<0$ **の場合**：直接計算すると、

$$\int \frac{1}{-(x+b)}\,\mathrm{d}x = -\ln\left(-(x+b)\right)+C = -\ln|x+b|+C.$$

しかし公式からは $\ln\left(x+b+|x+b|\right) = \ln\left((x+b)-(x+b)\right) = \ln 0$ となり、これは定義されない。したがって、この場合には結果は成り立たない。

導出のどこが破綻するのかを見ておく価値がある。$x+b<0$ のとき、すべての x に対して $t = x-(x+b) = -b$ となる。つまり t は定数であり、新しい変数としてまったく使えない。そして $t+b=0$ は、まさに割り算に用いた量である。$t+b>0$ を保証していたのは狭義の不等式（strict inequality）$b^2<c$ であった。$b^2=c$ のときには広義の不等式（weak inequality）$t+b\geq 0$ しか残らず、等号はちょうど $x+b\leq 0$ のときに成り立つ。

検算

- $b=0$、$c=1$ とすると、結果は $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C = \operatorname{arsinh} x + C$ となり、よく知られた結果に一致する。
- 数値的にも、無作為に選んだ b と $c>b^2$ について、無作為な積分区間でシンプソンの公式（Simpson's rule）により求めた積分値は、対数の公式の差と 10^{-7} より高い精度で一致する。$b^2=c$、$b=1.3$ の場合、$\int_{0.5}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{|x+b|}\approx 1.07992$ であり、公式から得られる $\ln\frac{5.3}{1.8}$ と一致する。

よくある間違い

- $t+b>0$ であることに気づかずに $\ln|t+b|$ と書き、その結果 $b^2=c$ のときに何がうまくいかなくなるのかを見落とす。
- 最後の小問で $\sqrt{(x+b)^2}=x+b$ としてしまい、$x+b<0$ での破綻を完全に覆い隠してしまう。

STEP のその先へ

置換 $t=x+\sqrt{x^2+2bx+c}$ は**オイラー（*Euler*）置換**（Euler's substitutions）の一つであり、x と $\sqrt{ax^2+bx+c}$ の有理関数（rational function）の積分を、どれも t の有理関数の積分に変換する。最後の小問は、変数変換（change of variable）において、新しい

変数が古い変数に滑らかかつ一対一（one-to-one）に依存していなければならない理由を示している。t が定数になると、この方法は崩壊するのである。Bartle と Sherbert の *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）では、これらの仮定を厳密にした形で変数変換の定理が述べられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。