解答例

STEP I 2008、第 13 問

確率・統計 ・ 円順列

> **STEP I 2008、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q13

鍵となる考え方

円卓では人どうしの相対的な位置だけが意味をもつので、1 人の席を固定し、残りの 5 人をその周りに並べる。すると同様に確からしい並び方は $5! = 120$ 通りとなり、どの確率も 120 通りのうちの個数として求められる。隣り合って座らなければならない夫婦は、1 つの「ブロック」にまとめて扱える。このブロックの内部の並び方は 2 通りある。「ちょうど」や「1 組も〜ない」の場合は、直接数えるか、事象「夫婦 k が隣り合う」に対して包除原理（inclusion–exclusion）を用いる。

解答

3 組の夫婦を A, a；B, b；C, c とする。全員を円卓に沿って 1 席ずつ回転させても、互いの相対的な座り方は変わらない。そこで A の席を固定し、残りの 5 人を時計回りの順に残りの席へ座らせる。こうして並び方は $5! = 120$ 通りとなり、これらはすべて同様に確からしい。

代わりに席に番号を付けて区別すると、並び方は $6! = 720$ 通りとなる。このとき各相対的な並び方は、A が座りうる席ごとに 1 回ずつ、ちょうど 6 回現れるので、確率は変わらない。

一般に役立つ数え方として、n 個のものを円形に並べる円順列（circular arrangement）の総数は $(n-1)!$ 通りである（1 つを固定し、残りを並べればよい）。

小問 (i)

すべての夫婦が隣り合うなら、各夫婦を 1 つのブロックにまとめる。すると円卓の周りには 3 つのブロックがあり、その並べ方は $(3-1)! = 2$ 通りである。各ブロックの内部では、夫は妻のどちら側にも座れるので、$2^3 = 8$ 通りの選び方がある。よって

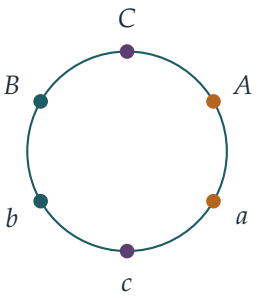
$$\mathrm{P}(3\text{組の夫婦がすべて隣り合う}) = \frac{2\times 8}{120} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15},$$

となり、示すべき結果が得られた。

小問 (ii)

まず、隣り合わ**ない**夫婦を選ぶ。選び方は 3 通りである。それを C, c とすると、A, a と B, b は隣り合い、C と c は隣り合わない。

Aa と Bb をそれぞれブロックにまとめる。すると円卓の周りには Aa、Bb、C、c の 4 つの単位があり、その並べ方は $3! = 6$ 通りである。C を固定し、この 4 単位の円の残り 3 か所のうち c がどこに入るかを考える。そのうち 2 か所では c は C の隣になり、1 か所では c は真向かいになる。よって C と c が離れているのは、6 通りのうちちょうど $6/3 = 2$ 通りである。このとき、次の図のように、C と c の間にある 2 つのすき間にはそれぞれブロックが 1 つずつ入る。



考えてみよう なぜこれは見た目よりも簡単なのだろうか？

C と c が向かい合っているとき、残る自由度は、どちらのブロックがどちら側に座るか（2 通り）と、各ブロック内の順序（$2\times 2 = 4$ 通り）だけである。よって並び方は $2\times 4 = 8$ 通りとなる。離れて座る夫婦の選び方 3 通りすべてを考えると、

$$\mathrm{P}(\text{ちょうど 2 組の夫婦が隣り合う}) = \frac{3\times 8}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}.$$

小問 (iii)

$k = 1, 2, 3$ に対し、夫婦 k が隣り合うという事象を E_k とする。それぞれの種類の並び方が 120 通りのうち何通りあるかを数える。

- $|E_1|$：夫婦 1 を 1 つのブロックにまとめる。すると円卓の周りには 5 つの単位が残るので、並べ方は $4! = 24$ 通りであり、それぞれに内部の順序が 2 通りあるから、48 通りとなる。
- $|E_1 \cap E_2|$：2 つのブロックと 2 人で 4 つの単位になる。並べ方は $3! = 6$ 通りで、内部の順序は $2^2 = 4$ 通りあるから、24 通りとなる。
- 小問 (i) より、$|E_1 \cap E_2 \cap E_3| = 16$ である。

対称性により、どの夫婦を選んでも同じ個数になる。包除原理により、少なくとも 1 組の夫婦が隣り合う並び方の数は

$$|E_1 \cup E_2 \cup E_3| = 3(48) - 3(24) + 16 = 144 - 72 + 16 = 88.$$

よって、どの夫婦も隣り合わない並び方は $120 - 88 = 32$ 通りであり、

$$\mathrm{P}(\text{どの夫も妻の隣に座らない}) = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}.$$

考えてみよう 小問 (ii) も同じ個数から読み取れるだろうか？

読み取れる。各 $|E_i \cap E_j|$ は、ちょうど夫婦 i, j の組だけが隣り合う並び方に、3 組すべてが隣り合う並び方を加えたものを数えている。よって、ちょうど 2 組の夫婦が隣り合う並び方の数は $3(24) - 3(16) = 24$ であり、小問 (ii) と一致する。

検算

- 4 つの場合を合わせると、120 通りすべてを尽くさなければならない。ちょうど 1 組の夫婦が隣り合う並び方の数は $3(48) - 2 \cdot 3(24) + 3(16) = 48$ であり、$32 + 48 + 24 + 16 = 120$ となる。
- 席を区別した 720 通りの座り方すべてをコンピュータで列挙すると、隣り合う夫婦が $0, 1, 2, 3$ 組である確率はそれぞれ $\frac{4}{15}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}$ となる。これらは上の答えと一致する。
- 妥当性の確認：ある妻の両隣の 2 人は 5 人の中から選ばれるので、夫が妻の隣にいる確率は $\frac{2}{5}$ である。これは $|E_1|/120 = 48/120$ と一致する。

よくある間違い

- 並び方の総数に $6!$ を用いながら、条件を満たす座り方を円順列として数えること、またはその逆。分子と分母は同じ数え方で揃えなければならない。

- 各ブロック内の 2 人の順序に対する 2 倍を忘れること。
- 小問 (ii) で、3 組目の夫婦も隣り合う並び方を除くのを忘れること。これを除かないと $\frac{3\times24}{120} = \frac{3}{5}$ となり、大きすぎる値になる。

STEP のその先へ

これは**メナージュ問題**（*ménage problem*）の縮小版である。古典的な問題では男女が交互に座ることも要求され、その一般解（Touchard の公式）はまさにこの種の包除原理から得られる。制限のない今回の問題で夫婦が n 組のとき、隣り合って座る夫婦の組数の期待値（expected number）は $n \cdot \frac{2}{2n-1} \to 1$ である。どの夫婦も隣り合わない確率は e^{-1} に収束（converge）し、これは有名な撹乱順列（derangement）の極限と同じである。男女が交互に座るメナージュ問題では、この確率は e^{-2} に収束する。包除原理やこのような極限については、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）に詳しい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。