解答例

STEP I 2008、第 11 問

力学 ・ 最大摩擦力でのつり合い

> **STEP I 2008、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q11

鍵となる考え方

$\angle P_1OP_2$ は直角であるから、半径（radius）OP_2 は P_1 における接線（tangent）に平行であり、半径 OP_1 は P_2 における接線に平行である。したがって、2 本の半径の方向に力を分解すると、各方程式には法線抗力（normal reaction）と摩擦力（friction force）がそれぞれ 1 つずつしか現れない。これに、2 つの法線抗力がいずれもモーメントをもたない点 O のまわりのモーメント（moment）の式を加え、両端で限界摩擦（limiting friction）$F = \mu R$ を用いると、α が消えた 3 つの方程式が得られる。最後の部分は、姿を変えた倍角の公式（double-angle formulae）にほかならない。

解答

モデルと力

棒を、中点に重心（centre of mass）G をもつ一様な剛体（rigid body）の棒とみなし、輪は軽いものとし、針金の半径を a とする。輪は軽いので、針金が各輪に及ぼす力はそのまま棒に伝わる。よって、棒が P_1 と P_2 で針金に接しているとみなしてよい。各端には、半径方向の法線抗力と接線方向の摩擦力がはたらく。

原点を O とし、x 軸を右向き、y 軸を上向きにとり、P_1 は針金の最下点より左側にあるとする。$\angle P_1OP_2 = 90^\circ$ であり、P_1 は鉛直下向きと角 α をなすから、OP_2 は反対側で鉛直下向きと角 $90^\circ - \alpha$ をなす。

$$P_1 = a(-\sin\alpha, -\cos\alpha), \qquad P_2 = a(\cos\alpha, -\sin\alpha).$$

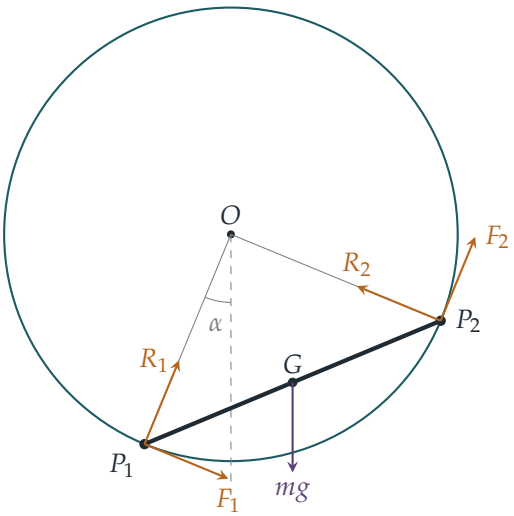
$0 < \alpha < 45^\circ$ より $\cos\alpha > \sin\alpha$ であるから、確かに P_1 は P_2 より低く、どちらも O より下にある。

中点は $G = \frac{a}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha, -\cos\alpha - \sin\alpha)$ であり、これは O を通る鉛直線の**右側**にある。したがって、重力は O のまわりに時計回りのモーメントをもち、棒は針金に沿って時計回りに滑り出そうとしている（P_2 は下へ、P_1 は上へ動く）。摩擦力はこれを妨げるので、両端で**反時計回り**にはたらく。すなわち、P_1 では針金に沿って下向きに、P_2 では針金に沿って上向きにはたらく。

P_1 と P_2 から O へ向かう単位ベクトル（unit vector）を $\mathbf{u}_1$、$\mathbf{u}_2$ とする。

$$\mathbf{u}_1 = (\sin\alpha, \cos\alpha), \qquad \mathbf{u}_2 = (-\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0.$$

P_1 における反時計回りの接線方向は $-\mathbf{u}_2$ であり、P_2 におけるそれは $\mathbf{u}_1$ である。（O へ向かう）法線抗力を R_1, R_2、摩擦力を F_1, F_2 とする。



つり合いの式

重力 mg は鉛直下向きにはたらくので、その $\mathbf{u}_1$ 方向および $\mathbf{u}_2$ 方向の成分は $-mg\cos\alpha$ と $-mg\sin\alpha$ である。

$\mathbf{u}_1$ 方向（すなわち P_1O 方向）に分解する。R_1 と F_2 が寄与し、R_2 と F_1 はこの方向に垂直である。よって

$$R_1 + F_2 = mg\cos\alpha. \tag{1}$$

$\mathbf{u}_2$ 方向（P_2O 方向）に分解する。R_2 は $+R_2$ を寄与し、$-\mathbf{u}_2$ の向きをもつ F_1 は $-F_1$ を寄与する。よって

$$R_2 - F_1 = mg\sin\alpha. \tag{2}$$

O のまわりのモーメントを考える。法線抗力は O を通る。各摩擦力は O から距離 a の位置で接線方向にはたらき、反時計回りのモーメント aF_1 と aF_2 を与える。重力は O

から水平距離 $\frac{a}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$ の位置で時計回りにはたらく。したがって

$$F_1 + F_2 = \tfrac{1}{2}mg(\cos\alpha - \sin\alpha). \tag{3}$$

限界摩擦と $\tan\alpha$

棒は両端で滑り出す直前にあるので、$F_1 = \mu R_1$ かつ $F_2 = \mu R_2$ である。$c = \cos\alpha$、$s = \sin\alpha$ とおくと、式 (1) と (2) は

$$R_1 + \mu R_2 = mgc, \qquad -\mu R_1 + R_2 = mgs,$$

となり、その解は

$$R_1 = \frac{mg(c - \mu s)}{1 + \mu^2}, \qquad R_2 = \frac{mg(s + \mu c)}{1 + \mu^2}.$$

である。μ が小さいとき（後で見るように、ここでは必ずそうなる）どちらも正であるから、抗力は図のとおり確かに O へ向かってはたらく。さて、(3) は $\mu(R_1 + R_2) = \frac{1}{2}mg(c - s)$ を意味する。すなわち

$$\begin{aligned} 2\mu(c - \mu s + s + \mu c) &= (1 + \mu^2)(c - s) \\ c\,(2\mu + 2\mu^2 - 1 - \mu^2) + s\,(2\mu - 2\mu^2 + 1 + \mu^2) &= 0 \\ s\,(1 + 2\mu - \mu^2) &= c\,(1 - 2\mu - \mu^2). \end{aligned}$$

$c\,(1 + 2\mu - \mu^2)$ で割ると（$c > 0$ であり、次に見るように $\tan\alpha > 0$ より μ は小さくなければならないので、これは 0 でない）、

$$\tan\alpha = \frac{1 - 2\mu - \mu^2}{1 + 2\mu - \mu^2},$$

となり、示すべき式が得られた。

> **考えてみよう** 摩擦力が時計回りではなく反時計回りにはたらくことは、どうしてわかるのか？

G は O の右側にあるので、O のまわりの重力のモーメントは時計回りであり、法線抗力は O のまわりにモーメントをもたない。したがって、反時計回りのモーメントは摩擦力だけで生み出さなければならず、摩擦力がなければ棒は時計回りに滑る。もし摩擦力を逆向きに描いていたら、μ を $-\mu$ に置き換えた同じ計算になり、$\tan\alpha > 1$ が得られるが、これは $\alpha < 45^\circ$ に矛盾する。

棒の傾きの角

P_1 から P_2 へのベクトルは $a(\cos\alpha + \sin\alpha,\ \cos\alpha - \sin\alpha)$ であり、その成分はどちらも正である。よって、棒が水平となす鋭角 θ は

$$\tan\theta = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} = \tan(45^\circ - \alpha),$$

を満たし、$0 < 45^\circ - \alpha < 45^\circ$ であるから $\theta = 45^\circ - \alpha$ を得る。

次に、$\tan\alpha$ の式に $\mu = \tan\lambda$ を代入し、分子と分母に $\cos^2\lambda$ を掛ける。

$$\tan\alpha = \frac{(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda) - 2\sin\lambda\cos\lambda}{(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda) + 2\sin\lambda\cos\lambda} = \frac{\cos 2\lambda - \sin 2\lambda}{\cos 2\lambda + \sin 2\lambda} = \frac{1 - \tan 2\lambda}{1 + \tan 2\lambda} = \tan(45^\circ - 2\lambda).$$

$0 < \lambda < 22.5^\circ$ であるから、角 $45^\circ - 2\lambda$ は α と同様に 0° と 45° の間に（端を含まずに）ある。正接関数はこの区間で一対一（one-to-one）であるから、$\alpha = 45^\circ - 2\lambda$ である。したがって

$$\theta = 45^\circ - \alpha = 2\lambda,$$

となり、これが示すべきことであった。（これは条件 $\lambda < 22.5^\circ$、すなわち $\mu < \sqrt{2} - 1$ の意味も説明している。この条件はちょうど $\tan\alpha > 0$ となるための条件なのである。）

検算

- $\mu = 0$（滑らかな針金）のとき $\tan\alpha = 1$ となるので、$\alpha = 45^\circ$ であり、棒は水平になる。これは、滑らかな円上に置かれた棒が静止できる唯一の位置である。
- $\mu = 0.2$ のとき、$\tan\alpha = 0.56/1.36$ より $\alpha \approx 22.38^\circ$、$\theta = 45^\circ - \alpha \approx 22.62^\circ$ となり、$2\arctan 0.2 \approx 22.62^\circ$ と一致する。
- 数値的に、$\mu \in (0, \sqrt{2} - 1)$、$a$、$m$ の無作為な値 10^4 組について、これらの R_1, R_2, F_1, F_2 を完全なベクトル方程式に代入したところ、合力もモーメントも（約 10^{-14} の精度で）0 となり、$R_1, R_2 > 0$ かつ $\theta = 2\lambda$ であった。

よくある間違い

- 水平方向と鉛直方向に分解すること。それでも解けるが、すべての方程式に 4 つの力がすべて現れてしまう。互いに垂直な 2 本の半径の方向に分解するほうがはるかにすっきりする。
- 一方の端で摩擦力の向きを間違えること。2 つの輪は円に沿って同じ向きに滑るので、摩擦力は**両端**で反時計回りである。
- $\theta = 45^\circ - \alpha$ に一言の根拠が必要であることを忘れること。弦は $\angle P_1OP_2$ の二等分線に垂直である。

STEP のその先へ

もっと鮮やかな幾何学的見方もある。限界摩擦のとき、各端での抗力の合力は半径と角 λ をなす。そして 3 つの力を受けてつり合っている物体では、それらの力が共点（concurrent）でなければならず、ここからただちに $\theta = 2\lambda$ が導かれる。この「摩擦角（angle of friction）」の考え方と、摩擦が等式ではなく不等式 $|F| \leq \mu R$ で表されるという事実は、複数の接触点をもつ静力学の問題の出発点となる。そうした問題では、どの接触点が最初に滑るかを問わなければならない。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、摩擦と剛体のつり合いをこのような丁寧さで扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。