解答例

STEP I 2008、第 10 問

力学 ・ 放物運動

> **STEP I 2008、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q10

鍵となる考え方

重力（gravity）は鉛直方向にしかはたらかないので、水平方向の速度 $V\cos\alpha$ は決して変化せず、水平到達距離（range）は単に $V\cos\alpha$ に全飛行時間（time of flight）を掛けたものになる。飛行時間は鉛直方向の運動だけから決まり、その運動は三つの段階に分けられる。下の層を通過して上昇する段階、高さ h より上に出ている段階、そして再び下の層を通過して下降する段階である。各段階はいずれも等加速度（constant acceleration）運動の問題であり、対称性（symmetry）が仕事の大部分を担ってくれる。

解答

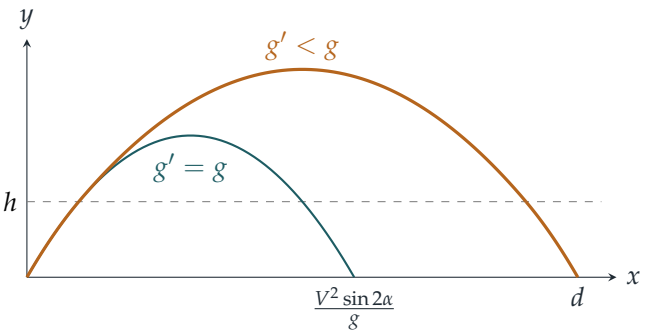
粒子を空気抵抗（air resistance）のない質点とみなし、平らな地面の上の鉛直面内を運動するものとする。x 軸を水平に、y 軸を鉛直上向きにとり、原点を投射点とする。

概形の図

高さ h より下では、二つの軌道はまったく同じ方程式に従うので、そこでは一致する。条件 $V^2\sin^2\alpha > 2gh$ は、はじめの鉛直方向の運動エネルギー（kinetic energy）が加速度 g のもとで高さ h まで上昇するのに十分であることを意味しており、したがって粒子は確かに $y = h$ より上に出る。

h より上では、$g' < g$ の場合は重力が弱いので、鉛直方向の速さの減り方がゆるやかになる。粒子はより高く上がり、そこにより長くとどまり、より平たく幅の広い放物線（parabola）を描く。$y = h$ において速度は連続である（不連続に変わるのは加速度だけである）から、二つの弧は角をつくらずになめらかにつながる。ただし曲率

(curvature) は急に変化する。下降するとき、粒子は（上の弧の対称性により）出ていったときと同じ速さと角度で下の層に再び入り、最後の弧は最初の弧の鏡像になる。したがって $g' < g$ の経路のほうが遠くに着地する。



水平到達距離

初速度の鉛直成分は $V\sin\alpha$ であり、$y < h$ の間の加速度は $-g$ である。

段階 1：高さ h まで上昇する。 $y = h$ に達したときの（上向きの）鉛直方向の速さを w とする。$v^2 = u^2 + 2as$ より

$$w^2 = V^2\sin^2\alpha - 2gh = \sin^2\alpha\left(V^2 - 2gh\,\mathrm{cosec}^2\alpha\right) = V'^2\sin^2\alpha,$$

であり、$\sin\alpha > 0$ かつ粒子はまだ上昇中なので正の平方根をとって $w = V'\sin\alpha$ となる。（与えられた条件は、ちょうど V' が正の実数となるための条件である。）かかる時間は、$v = u + at$ より

$$t_1 = \frac{V\sin\alpha - V'\sin\alpha}{g} = \frac{(V - V')\sin\alpha}{g}.$$

である。

段階 2：高さ h より上。 このとき粒子は $y = h$ から速さ w で上向きに動き始め、加速度は $-g'$ である。$wt - \frac{1}{2}g't^2 = 0$ となるとき、すなわち

$$t_2 = \frac{2w}{g'} = \frac{2V'\sin\alpha}{g'},$$

だけ時間が経ったときに $y = h$ に戻り、そのとき鉛直方向の速さ w で下向きに動いている。

考えてみよう 最後の段階にかかる時間が最初の段階と同じになるのはなぜか。

段階 3 では、粒子は $y = h$ から速さ w で下向きに動き始め、下向きの加速度 g を受けて $y = 0$ まで落下する。これは段階 1 を時間について逆にたどったものである。等加速度運動は可逆であり、段階 1 は同じ加速度のもとで、$y = 0$ を速さ $V\sin\alpha$ で出発して $y = h$ に速さ w で達する運動であった。したがって、時間 $t_3 = t_1$ の後に鉛直方向の速さ $V\sin\alpha$ で地面に達する。(直接計算してもよい。鉛直方向の速さは w から $V\sin\alpha$ まで割合 g で変化するので、かかる時間は $(V\sin\alpha - w)/g$ である。)

したがって全飛行時間は

$$T = 2t_1 + t_2 = 2\sin\alpha\left(\frac{V - V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right).$$

である。水平方向の力ははたらかないので、水平方向の速度は終始 $V\cos\alpha$ のままであり、

$$\begin{aligned} d = V\cos\alpha \cdot T &= \left(\frac{V - V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right) 2V\sin\alpha\cos\alpha \\ &= \left(\frac{V - V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right) V\sin 2\alpha, \end{aligned}$$

となる。ここで $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ を用いた。これが求める結果である。

検算

- $g' = g$ ならば括弧の中は V/g となり、$d = V^2\sin 2\alpha/g$ という、地球上でおなじみの水平到達距離になる。
- $g' < g$ ならば $V'/g' > V'/g$ なので、d は一様な重力のもとでの水平到達距離より大きくなり、概形の図と合っている。
- ちょうど $V^2\sin^2\alpha = 2gh$ ならば $V' = 0$ である。このとき粒子は $y = h$ にちょうど触れるだけで g' の影響を受けず、やはり $d = V^2\sin 2\alpha/g$ となる。
- 数値で確かめる。$V = 10$、$\alpha = 60°$、$g = 10$、$h = 2$、$g' = 5$ とすると、$V' = \sqrt{140/3} \approx 6.83$、$d \approx 14.576$ となる。運動を数値的に刻んで追跡すると、相対誤差 10^{-5} 以内で同じ着地点が得られる。(これらは概形の図で用いた値である。)

よくある間違い

- 下の層を通過する下降の段階を忘れ、$2t_1 + t_2$ ではなく $t_1 + t_2$ としてしまう。
- 高さ h での鉛直方向の速さを $V'\sin\alpha$ ではなく V' としてしまう。V' は $\operatorname{cosec}\alpha$ 倍に拡大された速さであって、鉛直成分そのものではない。

- 弧がつながる点に角を描いてしまう。速度は連続なので、つなぎ目はなめらかである。

STEP のその先へ

位置によって変化する重力は、例外ではなくむしろ普通のことである。現実の重力は惑星の中心からの距離に対して $1/r^2$ のように弱まり、投射体の経路は放物線ではなく楕円（ellipse）の弧になる。運動を単純な力の法則が成り立つ領域に分け、境界で位置と速度をつなぎ合わせるのは標準的な手法であり、粒子の屈折（refraction）や、量子力学（quantum mechanics）における階段型ポテンシャル（step potential）でも再び用いられる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、等加速度運動の道具立てと、逆二乗（inverse-square）の重力のもとでの軌道運動の両方を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。