解答例

STEP I 2008、第 1 問

純粋数学 ・ 背理法

> **STEP I 2008、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q1

鍵となる考え方

有理数（rational number）は、加法、減法、乗法、および 0 でない数による除法について閉じている（closed）。ここで扱うことのほとんどすべては、この一つの事実から導かれる。すなわち、いくつかの数が有理数であれば、それらからこれらの演算で作った数もまた有理数である。最後の小問では、四つの数のうち二つが有理数であると仮定し、それらをうまく組み合わせて、無理数であると与えられている数のいずれかを作り出す。

解答

定義

実数 x が**有理数**であるとは、m と n を整数（integer）、$n \neq 0$ として $x = \frac{m}{n}$ と表せることをいう。実数が**無理数**（irrational number）であるとは、それが有理数でないこと、すなわち $x = \frac{m}{n}$ となる整数 m と $n \neq 0$ が存在しないことをいう。

命題 A

背理法（proof by contradiction）を用いる。pq は無理数であるが、p も q も無理数でないと仮定する。このとき両者とも有理数であるから、a, b, c, d を整数、$b, d \neq 0$ として $p = \frac{a}{b}$、$q = \frac{c}{d}$ と書ける。すると

$$pq = \frac{ac}{bd},$$

であり、ac と bd は整数で、b も d も 0 でないから $bd \neq 0$ である。よって pq は有理数となり、仮定に矛盾する。したがって、p と q の少なくとも一方は無理数である。

命題 B

同様に、$p+q$ は無理数であるが、$p = \frac{a}{b}$ と $q = \frac{c}{d}$（$b, d \neq 0$）がともに有理数であると仮定する。すると

$$p + q = \frac{ad + bc}{bd},$$

は分母が 0 でない整数の比であるから、$p+q$ は有理数である。この矛盾により、p と q の少なくとも一方は無理数であることが示された。

命題 C

$p = \sqrt{2}$、$q = -\sqrt{2}$ とする。両者とも無理数であるが、$p + q = 0 = \frac{0}{1}$ は有理数であるから、C は偽である。

念のため、$\sqrt{2}$ が無理数である理由を述べておく。$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ が既約分数（lowest terms）であるとすると、$m^2 = 2n^2$ であるから m^2 は偶数であり、したがって m は偶数である（奇数の 2 乗は奇数だからである）。$m = 2k$ とおくと $n^2 = 2k^2$ となり、n も偶数となって、既約であることに矛盾する。また、$-\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ ならば $\sqrt{2} = \frac{-m}{n}$ となるので、$-\sqrt{2}$ も無理数である。

最後の小問

π、π^2、$\mathrm{e}\pi$ が無理数であることは与えられている（必要なのはこの三つの事実だけである）。次の二つの簡単な事実を繰り返し用いる。

- r と s が有理数ならば、$r+s$、$r-s$、rs、および $s \neq 0$ のとき r/s も有理数である（その議論は A と B で用いたものとまったく同じである）。
- したがって、r が有理数ならば、$\frac{1}{2}$ が有理数であるから $\frac{1}{2}r$ も有理数である。

また、$\pi > 3 > \mathrm{e} > 0$ であるから $\pi + \mathrm{e} > 0$ かつ $\pi - \mathrm{e} > 0$ であり、特にどちらも 0 ではないことに注意する。

背理法を用いる。四つの数

$$\pi + \mathrm{e}, \quad \pi - \mathrm{e}, \quad \pi^2 - \mathrm{e}^2, \quad \pi^2 + \mathrm{e}^2$$

のうち二つが有理数であると仮定する。組は六通り考えられるので、それぞれを順に否定していく。

1. **$\pi + \mathrm{e}$ と $\pi - \mathrm{e}$ が有理数の場合。** 両者を加えると 2π が有理数となるので、π は

有理数である。矛盾。

2. $\pi^2 - e^2$ と $\pi^2 + e^2$ が有理数の場合。両者を加えると $2\pi^2$ が有理数となるので、π^2 は有理数である。矛盾。

3. $\pi + e$ と $\pi^2 + e^2$ が有理数の場合。一つ目を 2 乗すると $(\pi + e)^2$ は有理数であり、

$$2e\pi = (\pi + e)^2 - (\pi^2 + e^2),$$

であるから、$e\pi$ は有理数である。矛盾。

4. $\pi - e$ と $\pi^2 + e^2$ が有理数の場合。同様に、

$$2e\pi = (\pi^2 + e^2) - (\pi - e)^2$$

は有理数であるから、$e\pi$ は有理数である。矛盾。

5. $\pi + e$ と $\pi^2 - e^2$ が有理数の場合。$\pi + e \neq 0$ であるから、

$$\pi - e = \frac{\pi^2 - e^2}{\pi + e}$$

は分母が 0 でない有理数どうしの商であり、有理数である。すると $\pi + e$ と $\pi - e$ がともに有理数となるが、これは場合 1 により不可能である。

6. $\pi - e$ と $\pi^2 - e^2$ が有理数の場合。$\pi - e \neq 0$ であるから、

$$\pi + e = \frac{\pi^2 - e^2}{\pi - e}$$

は有理数であり、やはり場合 1 により矛盾が生じる。

? **考えてみよう** 場合 6 で $\pi - e \neq 0$ が必要なのはなぜか。

0 で割ることは許されないからである。「有理数を有理数で割ると有理数になる」という手順は、分母が 0 でないときにしか成り立たない。もし $\pi = e$ であったなら、$\pi^2 - e^2 = 0$ は有理数であっても、$\pi + e$ については何もわからない。ここでは $\pi - e \approx 0.42$ であるから、問題はない。

どの組も矛盾に至るので、四つの数のうち二つが同時に有理数になることはない。よって、それらのうち有理数であるものは高々一つである。これが示すべきことであった。

検算

用いた恒等式は数値的に容易に確かめられる。$\pi \approx 3.14159$、$e \approx 2.71828$ とすると、$(\pi + e)(\pi - e) \approx 5.85987 \times 0.42331 \approx 2.48055 \approx \pi^2 - e^2$ であり、$(\pi + e)^2 - (\pi^2 + e^2) \approx$

$17.0795 \approx 2e\pi$ である。組の数も数えておこう。四つの数からは $\binom{4}{2} = 6$ 通りの組ができ、六つすべてを扱っている。なお、e と e^2 が無理数であることは一度も用いていないことに注意しよう。対称性により、場合 1 と 2 では π と π^2 の代わりにそれらを用いることもできた。

よくある間違い

- うっかり A や B の逆（converse）を証明してしまう。A は「積が無理数 $\Rightarrow$ ある因数が無理数」と述べている。その逆は偽である（$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$）。
- $\pi \pm e$ が 0 でないことに言及せずに、それで割ってしまう。
- 命題 C を真であるかのように用いる。たとえば「π と e は無理数なので、$\pi + e$ は無理数である」と主張してしまう。実は、$\pi + e$ が無理数であるかどうかは未解決問題（open problem）である。

STEP のその先へ

ここで用いた「閉じている」という事実は、有理数全体が**体**（field）をなすことを意味している。体とは、その中で加法、減法、乗法、除法（0 による除法を除く）を行っても外に出ることのない集合である。体は大学 1 年次の代数学の講義における中心的な対象であり、「$\pi + e$ は無理数か？」といった問いは超越数論（transcendence theory）へとつながっていく。この分野では、わかっていることは驚くほど少ない。代数学については Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を、有理数と無理数の整数論については Davenport, *The Higher Arithmetic*（高等算術）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。