解答例

STEP III 2007、第 9 問

力学 ・ 単振動

> **STEP III 2007、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q9

鍵となる考え方

ばね（spring）は 2 つのビーズ（bead）を同一直線に沿って互いに逆向きに等しい大きさで引く、または押す。また輪（hoop）からの抗力は半径方向を向くので、中心のまわりの全角運動量（angular momentum）は 0 のまま保たれる。したがってビーズは互いに鏡像の位置を保って動く。これにより問題は 1 つの座標に帰着し、エネルギー保存則（conservation of energy）から θ についての単振動（simple harmonic motion, SHM）が得られる。落とし穴は、θ が**鋭角**である半角だという点である。ビーズが十分に離れて直径の両端を通り過ぎると、エネルギーの式の形が変わり、運動は単振動の 2 つの弧をつなぎ合わせて組み立てなければならない。

解答

設定

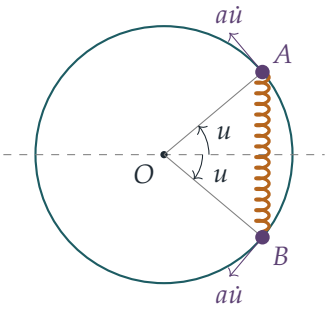
ビーズを固定された滑らかな輪の上の質点とし、ばねは軽いとみなす。ビーズにはたらく力は、重力と輪からの抗力の鉛直成分（これらは打ち消し合う）、抗力の水平成分（輪は滑らかなので半径方向を向く）、そしてばねの力である。A にはたらくばねの力と B にはたらくばねの力は大きさが等しく逆向きで、同一直線 AB に沿ってはたらくので、O を通る鉛直軸のまわりのモーメントの和は 0 である。半径方向の力はこの軸のまわりにモーメントをまったくもたない。よってこの軸のまわりの全角運動量は保存され、ビーズは静止状態から動き始めるので、その値は 0 である。

輪に沿った角を固定された 1 本の半径から測り、A と B の位置の角をそれぞれ ϕ_A、ϕ_B とする。角運動量が 0 であることは $ma^2(\dot{\phi}_A + \dot{\phi}_B) = 0$ を意味するので、$\phi_A + \phi_B$ は一

定である。基準の半径を最初の角 AOB の二等分線にとれば、すべての時刻で

$$\phi_A = u, \qquad \phi_B = -u,$$

となる。ここで u は 1 つの座標で、最初は $u = \beta$ である。各ビーズの速さは $a\dot{u}$ なので、運動エネルギーは $2 \cdot \frac{1}{2} m a^2 \dot{u}^2 = m a^2 \dot{u}^2$ である。



$0 < u \leq \frac{\pi}{2}$ の間は角 AOB は $2u$ であるが、u が $\frac{\pi}{2}$ を超えるとビーズは直径の両端を通り過ぎており、角 AOB は $2\pi - 2u$ となる。よって

$$\theta = u \quad (0 < u \leq \tfrac{\pi}{2}), \qquad \theta = \pi - u \quad (\tfrac{\pi}{2} \leq u < \pi).$$

ビーズが $u = \beta$ で静止状態から放されることから、エネルギー保存則より

$$m a^2 \dot{u}^2 + m k^2 a^2 (\theta - \alpha)^2 = m k^2 a^2 (\beta - \alpha)^2, \qquad \text{よって} \qquad \dot{u}^2 = k^2 [(\alpha - \beta)^2 - (\theta - \alpha)^2].$$

「圧縮されている」とは、ばねが自然長より短いことを意味する。エネルギーは $\theta = \alpha$ で最小となるので、これが自然長に対応し、長さ $2a \sin\theta$ は $(0, \frac{\pi}{2})$ で θ について増加する。したがって $0 < \beta < \alpha$ である。

$u \leq \frac{\pi}{2}$ の間の運動

ここでは $\theta = u$ であり、エネルギーの式を t で微分して $2\dot{u}$ で割ると（ビーズが動いているときは常に成り立ち、さらに連続性から一般に成り立つ）

$$\ddot{\theta} = -k^2(\theta - \alpha).$$

これは $\theta = \alpha$ を中心とする角振動数（angular frequency）k の単振動である。$\theta = \beta$ で静止状態から始まるので

$$\theta - \alpha = -(\alpha - \beta)\cos kt,$$

となり、ビーズは互いに離れていき、何も妨げるものがなければ $t = \frac{\pi}{k}$ で $\theta = 2\alpha - \beta$ に達する。すべては $2\alpha - \beta$ が $\frac{\pi}{2}$ より小さいかどうか、すなわち β と $2\alpha - \frac{\pi}{2}$ の大小関係にかかっている。この臨界値が $(0, \alpha)$ に入るのはまさに $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ だからであり、したがって以下の 3 つの場合はいずれも起こりうる。

場合 1： $2\alpha - \frac{\pi}{2} < \beta < \alpha$

このとき $2\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ なので、ビーズは直径の両端に達することはなく、常に $\theta = u$ であり、運動は $\theta = \beta$ と $\theta = 2\alpha - \beta$ の間の純粋な単振動である。周期は

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

場合 2： $0 < \beta < 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

このとき θ は単振動が折り返す前に $\frac{\pi}{2}$ に達する。その時刻を t_1 とすると

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = -(\alpha - \beta)\cos kt_1, \qquad \text{よって} \qquad \cos kt_1 = -\lambda, \quad \text{ただし} \lambda = \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\alpha - \beta}.$$

$\alpha < \frac{\pi}{2}$ かつ $\beta < 2\alpha - \frac{\pi}{2}$ なので、$0 < \lambda < 1$ である。よって

$$kt_1 = \pi - \arccos\lambda = \frac{\pi}{2} + \arcsin\lambda.$$

この瞬間、エネルギーの式から $\dot{u}^2 = k^2[(\alpha - \beta)^2 - (\frac{\pi}{2} - \alpha)^2] > 0$ となるので、ビーズはまだ互いに離れる向きに動いており、そのまま直径の両端を通り過ぎる。

考えてみよう ビーズが直径の両端を通り過ぎた後、何が起こるか。

$u \geq \frac{\pi}{2}$ では $\theta = \pi - u$ なので、エネルギーの式は

$$\dot{u}^2 = k^2[(\alpha - \beta)^2 - (u - (\pi - \alpha))^2],$$

となり、これは $u = \pi - \alpha$ を中心とする u の単振動で、角振動数はやはり k である。これは直径を通過する前の運動を $u = \frac{\pi}{2}$ に関して鏡映したものである。したがってビーズはさらに時間 t_1 かけて $u = \pi - \beta$ で静止し（ここで再び $\theta = \beta$ となるが、ビーズは今度は O の反対側にある）、その後、全行程を逆にたどって $u = \beta$ に戻る。ビーズはこのような 4 つの段階を経て出発点に戻るので、運動の周期は

$$T = 4t_1 = \frac{4}{k}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\alpha - \beta}\right) = \frac{2}{k}\left(\pi + 2\arcsin\frac{\pi - 2\alpha}{2(\alpha - \beta)}\right).$$

（ビーズが O のどちら側にあるかを区別しない角 θ そのものは、$2t_1$ ごとに同じ値を繰り返す。）

場合 3： $\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

このとき θ は、単振動によってビーズが静止するちょうどその時刻 $t = \frac{\pi}{k}$ に $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$ に達する。このときビーズは直径の両端にあるので、ばねは AOB に沿っており、各ビーズにはたらくばねの力は半径方向を向く。つまり輪に沿った成分をもたず、輪に

沿ってはたらく力はほかにない。ビーズはつり合いの状態にあり、静止しているので、その位置にとどまる。よって

$$\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$$

が振動が起こらない値である。これは 2 つの周期の式とも整合している。β が下からこの値に近づくと $\lambda \to 1$ となり、場合 2 の周期は $\frac{4\pi}{k}$、すなわち場合 1 の周期の 2 倍に近づく。ビーズが直径の近くにますます長くとどまるようになるからである。

検算

- $k = 1$、$\alpha = \frac{3\pi}{8}$、$\beta = \frac{\pi}{8}$ とすると、$2\alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ なので場合 2 にあたる。このとき $\lambda = \frac{\pi/8}{\pi/4} = \frac{1}{2}$、$\arcsin\lambda = \frac{\pi}{6}$ であり、$T = 2(\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{8\pi}{3} \approx 8.378$ となる。
- 2 つのビーズの運動方程式を数値的に解いた（エネルギーを両方のビーズの位置の関数として扱い、対称性は仮定していない）。$k = 1$、$\alpha = 1.2$、$\beta = 0.5$ のとき、ビーズは 8.5162 後に出発点で再び静止し、公式の値 8.51622 と一致した。$\beta = 1.0$（場合 1）のときの周期は $6.2832 \approx 2\pi$ であった。
- 次元：k の単位は s^{-1} である（エネルギーは ma^2k^2 に角の 2 乗をかけたもの）。よって $\frac{2\pi}{k}$ は時間である。

よくある間違い

- 運動エネルギーを $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$ と書いてしまうこと。2 つのビーズがともに動くので、正しくは $ma^2\dot{\theta}^2$ である。因子 2 を落とすと、誤った角振動数 $\sqrt{2}k$ が得られる。
- 理由なしにビーズが対称に動くと仮定すること。これは O のまわりの角運動量保存から導かれるものであり、そのためには各ビーズにはたらくばねの力が同一直線 AB に沿っていることが必要である。
- θ が鋭角であることを忘れ、どの場合にも $\frac{2\pi}{k}$ と答えてしまうこと。

STEP のその先へ

保存量を用いて 2 粒子系を 1 つの座標に帰着させることは、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）の出発点である。ラグランジュ力学では対称性（ここでは配置全体を O のまわりに回転させること）から保存則が得られ、この考え方はネーター（Noether）の定理によって厳密に定式化される。場合 2 の運動は「二重井戸（double-well）」ポテンシャルの中の振動であり、その周期は振幅に依存し、エネルギーが中央の障壁の高さに等しくなるところで不連続に変化する。保存則と振動につい

てさらに知りたければ、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。