解答例

STEP III 2007、第 8 問

純粋数学 • リッカチ方程式

> **STEP III 2007、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q8

鍵となる考え方

非線形（nonlinear）方程式 $(*)$ はリッカチ方程式（Riccati equation）である。y^2 の項があるために線形性が崩れている。y を u'/u の定数倍とおくと $y' + y^2$ は u''/u に変わり、平方の項が消えて u についての線形二階微分方程式が残る。(i) の前半では、まさにその線形方程式の解が二つ与えられるので、あとは定数を合わせるだけである。(ii) では新しい線形方程式の解が二つ必要になるが、その手がかりは、$1-x$ が $1+x$ の x を $-x$ に置き換えたものだということである。

解答

小問 (i)

a と b を求める。 $u = x$ のとき $u' = 1$、$u'' = 0$ であるから、

$$\mathrm{a}(x) + x\,\mathrm{b}(x) = 0.$$

が必要である。$u = \mathrm{e}^{-x}$ のとき $u' = -\mathrm{e}^{-x}$、$u'' = \mathrm{e}^{-x}$ であり、$\mathrm{e}^{-x} \neq 0$ で割ると

$$1 - \mathrm{a}(x) + \mathrm{b}(x) = 0.$$

を得る。第一の式から（$x \neq 0$ のとき）$\mathrm{b} = -\mathrm{a}/x$ となり、これを第二の式に代入すると $\mathrm{a}(1 + \frac{1}{x}) = 1$ となる。よって

$$\mathrm{a}(x) = \frac{x}{1+x}, \qquad \mathrm{b}(x) = -\frac{1}{1+x}.$$

（これらは $x = 0$ においても両方の条件を満たす。）この方程式は線形かつ斉次（homogeneous）であり、x と e^{-x} は互いに定数倍の関係にないので、一般解（general

solution）は

$$u = Ax + B\mathrm{e}^{-x},$$

である。ただし A、B は任意定数である。

置換。 $u \neq 0$ として $y = \dfrac{u'}{3u}$ とおく。商の微分法（quotient rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{u''}{3u} - \frac{(u')^2}{3u^2} = \frac{u''}{3u} - 3\left(\frac{u'}{3u}\right)^2 = \frac{u''}{3u} - 3y^2.$$

したがって $y' + 3y^2 = \dfrac{u''}{3u}$ となり、平方の項がちょうど打ち消し合う。置換に係数 3 を入れたのはこのためである。方程式 $(*)$ は

$$\frac{u''}{3u} + \frac{x}{1+x} \cdot \frac{u'}{3u} = \frac{1}{3(1+x)},$$

となり、両辺に $3u$ を掛けると

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{x}{1+x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}u = 0,$$

が得られ、これが示すべき式である。これは、求めた a と b を用いた、この小問の冒頭の方程式にほかならない。

特殊解。よって $u = Ax + B\mathrm{e}^{-x}$ であり、

$$y = \frac{u'}{3u} = \frac{A - B\mathrm{e}^{-x}}{3(Ax + B\mathrm{e}^{-x})}.$$

考えてみよう 定数は二つあるのに条件は一つしかない。これは問題だろうか？

問題ではない。u に 0 でない定数を掛けても u'/u は変わらないので、意味をもつのは比 $A : B$ だけであり、一階微分方程式であれば自由な定数はちょうど一つのはずである。$x = 0$ で $y = 0$ という条件から $A - B = 0$ を得る。このとき $B = A \neq 0$ であり（そうでなければ $u \equiv 0$ となる）、A を約分すると

$$y = \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{3(x + \mathrm{e}^{-x})}.$$

となる。$\mathrm{e}^{-x} \geq 1 - x$ より $x + \mathrm{e}^{-x} \geq 1$ であるから、分母が 0 になることはない。以上で小問 (i) が完了する。

小問 (ii)

今度は y^2 の項の係数が 1 なので、$y = \dfrac{u'}{u}$ とおく。先ほどとまったく同様に

$$y' = \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u}\right)^2 = \frac{u''}{u} - y^2,$$

であるから $y' + y^2 = u''/u$ となる。方程式の両辺に u を掛けると、線形方程式

$$u'' + \frac{x}{1-x}u' - \frac{1}{1-x}u = 0.$$

が得られる。これは小問 (i) の方程式の x を $-x$ に置き換えたものである。実際、w が小問 (i) の方程式の解であるとき $v(x) = w(-x)$ とおくと、$v'(x) = -w'(-x)$、$v''(x) = w''(-x)$ であり、点 $-x$ における小問 (i) の方程式は

$$v''(x) + \frac{-x}{1-x}(-v'(x)) - \frac{1}{1-x}v(x) = 0,$$

となるが、これは新しい方程式そのものである。したがって、x と e^{-x} から解 $-x$（あるいは単に x）と e^x が得られる。直接確かめると、$u = x$ のとき $0 + \frac{x}{1-x} - \frac{x}{1-x} = 0$、$u = \mathrm{e}^x$ のとき $\mathrm{e}^x(1 + \frac{x}{1-x} - \frac{1}{1-x}) = \mathrm{e}^x(1-1) = 0$ である。ゆえに

$$u = Ax + B\mathrm{e}^x, \qquad y = \frac{u'}{u} = \frac{A + B\mathrm{e}^x}{Ax + B\mathrm{e}^x}.$$

$x = 0$ においてこれは $(A+B)/B$ であり、これが 2 に等しくなければならないので $A = B$（かつ $B \neq 0$）である。したがって

$$y = \frac{1 + \mathrm{e}^x}{x + \mathrm{e}^x}.$$

これが成り立つのは、0 を含み、$x + \mathrm{e}^x > 0$ かつ方程式が定義される区間、すなわち $x_0 < x < 1$ においてである。ここで $x_0 \approx -0.567$ は $x + \mathrm{e}^x = 0$ の解である。

検算

- $x = 0$ において小問 (ii) の答えは $2/1 = 2$ を与え、これを微分すると $y'(0) = \frac{1\cdot1 - 2\cdot2}{1} = -3$ となる。これは方程式の $1 - 4 - 0 = -3$ と一致する。
- $x \to \infty$ のとき、小問 (i) の答えは $\frac{1}{3x}$ のように 0 に近づく。このとき $y' \approx -\frac{1}{3x^2}$ と $3y^2 \approx \frac{1}{3x^2}$ は打ち消し合い、$\frac{x}{1+x}y \approx \frac{1}{3(1+x)}$ となるので、$(*)$ と整合する。
- 小問 (ii) の方程式を数値的に（$y(0) = 2$ からルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で）解いたところ $y(0.9) = 1.0297654\ldots$ となり、公式と小数第 10 位まで一致した。

よくある間違い

- 小問 (ii) でも係数 $\frac{1}{3}$ を残してしまう。掛ける係数は y^2 の係数に合わせなければならないので、ここでは $y = u'/u$ である。

- 一つの条件から A と B の両方を決めようとする。y に影響するのはそれらの比だけである。
- 小問 (ii) で確かめもせずに再び e^{-x} を用いる。$1-x$ での符号の変化により、これは e^{x} に変わる。

STEP のその先へ

方程式 $y' + P(x)y^2 + Q(x)y = R(x)$ はリッカチ方程式であり、置換 $y = u'/(Pu)$ によって常に線形二階微分方程式に変換される。逆に、任意の線形二階微分方程式の解の比 u'/u はリッカチ方程式を満たす。このため、これらの非線形方程式は量子力学から制御理論に至るまで、物理学のさまざまな場面に繰り返し現れるのである。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）では、この内容と線形二階微分方程式の理論（なぜ独立な二つの解から一般解が得られるのか）が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。