解答例

STEP III 2007、第 7 問

純粋数学 • 置換積分

STEP III 2007、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s3-q7

鍵となる考え方

「arctan」や「π」を使うことは許されていないので、あらゆる事実は積分の中での変数変換から導かなければならない。それぞれの置換（substitution）は、被積分関数（integrand）$1/(1+u^2)$（あるいは $1/\sqrt{1-u^2}$）がそれ自身、またはもう一方の被積分関数に変わり、積分区間の端だけが変化するように選ばれている。そこで積分区間の端を比較すると t と s の値どうしの間の等式が得られ、小問 (i) の対称性（symmetry）$u \mapsto 1/u$ によって、それらの等式が p の定数倍の形に変わるのである。

解答

小問 (i)

$x > 0$ とし、$u = v^{-1}$ とおくと、$\mathrm{d}u = -v^{-2}\,\mathrm{d}v$ である。u が 0 から x まで増加するとき、v は ∞ から $1/x$ まで減少する。また

$$\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+v^{-2}} = \frac{v^2}{v^2+1}.$$

したがって

$$t(x) = \int_{\infty}^{1/x} \frac{v^2}{1+v^2}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\mathrm{d}v = \int_{1/x}^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v,$$

となる。ここで、負の符号を用いて積分区間の上端と下端を入れ替えた。これが求める結果である。（被積分関数は $1/v^2$ 以下であるから、この広義積分（improper integral）は収束（converge）する。）

これを x の代わりに $1/x$ に適用すると、$t(1/x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$ を得る。これに $t(x) =$

$\int_0^x \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$ を加えると、二つの積分区間はつながって $[0,\infty)$ となる：

$$t(x)+t(1/x)=\int_0^\infty \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v=\tfrac{1}{2}p \qquad (x>0).$$

$x=1$ とおくと $2t(1)=\frac{1}{2}p$ となる。

小問 (ii)

$u\geq 0$ のとき $0\leq y<1$ である。両辺を 2 乗すると $y^2(1+u^2)=u^2$ となるので、$u^2(1-y^2)=y^2$ であり、

$$u=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

を得る。ただし、u と y は同符号であるから正の平方根をとった。商の微分法（quotient rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{\sqrt{1-y^2}+\dfrac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}}{1-y^2}=\frac{(1-y^2)+y^2}{(1-y^2)^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)^3}},$$

となり、求める式が得られる。

次に、これを $t(x)$ に代入する。$u^2=y^2/(1-y^2)$ から

$$1+u^2=\frac{1}{1-y^2},$$

を得るので、

$$\frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=(1-y^2)\cdot\frac{1}{(1-y^2)^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

写像 $u\mapsto y$ は増加関数であり（その逆関数の導関数が正であるから）、$u=0\mapsto y=0$、$u=x\mapsto y=x/\sqrt{1+x^2}$ であって、後者は 1 より小さい。よって

$$t(x)=\int_0^{x/\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y=s\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

$x=1$ とすると、小問 (i) を用いて $s(\frac{1}{\sqrt{2}})=t(1)=\frac{1}{4}p$ となる。

小問 (iii)

$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと、$z=\dfrac{u+a}{1-au}$ である。$0\leq u\leq a$ においては $au\leq\frac{1}{3}$ であるから、分母は正のままであり、z はそこで u の滑らかな関数である。微分すると

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=\frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2}=\frac{1+a^2}{(1-au)^2}.$$

考えてみよう なぜこの置換で $1/(1+u^2)$ が変わらないはずなのだろうか？

$1+z^2$ を通分して計算する。交差項 $\mp 2au$ は打ち消し合う：

$$1+z^2 = \frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2} = \frac{1+a^2u^2+u^2+a^2}{(1-au)^2} = \frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

割り算をすると

$$\frac{1}{1+z^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{1+u^2},$$

となるので、被積分関数は変わらず、積分区間の端だけが動く。（裏ではタンジェントの加法定理（addition formula）が働いているのだが、それを使う必要はない。）$u=0$ のとき $z=a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。$u=a$ のとき

$$z = \frac{2/\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2} = \sqrt{3}.$$

したがって

$$t(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

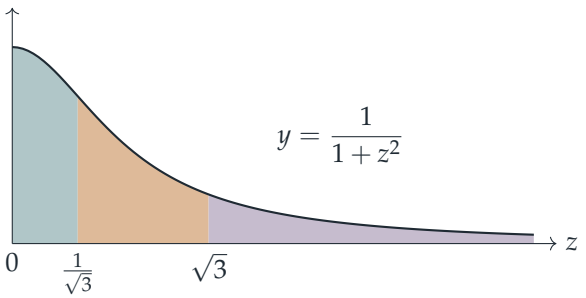
最後の段階として、区間 $[0,\infty)$ を $\frac{1}{\sqrt{3}}$ と $\sqrt{3}$ で分割する：

$$\tfrac{1}{2}p = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} + \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} + \int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

第 1 項は定義により $t(\frac{1}{\sqrt{3}})$ であり、第 2 項はいま示したことにより $t(\frac{1}{\sqrt{3}})$ である。$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ として小問 (i) を用いると、第 3 項も $\int_{1/x}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = t(x) = t(\frac{1}{\sqrt{3}})$ となる。よって

$$3\,t(\tfrac{1}{\sqrt{3}}) = \tfrac{1}{2}p.$$

下の図はこの三つの部分を示している：0 から ∞ までの $1/(1+z^2)$ の下の面積が、面積の等しい三つの領域に分かれる。



検算

数値的に（シンプソンの公式（Simpson's rule）を用いて）、$t(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 0.5235988$、$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} \approx 0.5235988$ であり、一方 $p \approx 3.1415927$ であるから、$3t(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 1.5707963 \approx \frac{1}{2}p$ となる。同様に $s(\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx t(1) \approx 0.7853982 \approx \frac{1}{4}p$ である。もちろん p の正体は π であり、これらの結果は $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$、$\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ を意味している。検算にはこれを使ってよいが、答案の中で使ってはならない。

よくある間違い

- $u = 1/v$ によって積分の向きが逆になることを忘れる。$\mathrm{d}u$ に現れる負の符号こそが、積分区間の端を正しい順序に戻すのである。
- 小問 (iii) で、置換をしただけで止めてしまう。$\frac{1}{\sqrt{3}}$ から $\sqrt{3}$ までの積分は等しい三つの部分のうちの一つにすぎず、$\sqrt{3}$ より先の部分には小問 (i) が必要である。
- 積分区間で $1 - au \neq 0$ であることを確認しない。ここでは $au \leq \frac{1}{3}$ であるから、この置換は正当である。

STEP のその先へ

この問題は、解析学者（analyst）が三角関数（trigonometric functions）を厳密に定義する方法を垣間見せてくれる。すなわち、$\arctan x$ を $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ として定義し、π をその無限大での極限の 2 倍として定義して、幾何学を一切使わずに、このような置換からあらゆる性質を導くのである。小問 (iii) の置換は形を変えた tan の加法定理であり、同じ方法で $xy < 1$ のとき $t(x) + t(y) = t\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ が証明できる。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）では、積分やべき級数（power series）を用いてこうした定義を確固とした基礎の上に据える方法が示されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。