解答例

STEP III 2007、第 6 問

純粋数学 • 複素数と円

> **STEP III 2007、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q6

鍵となる考え方

原点を中心とする半径 a の円の上では、共役（conjugation）をとることは反転（inversion）と同じである。すなわち $pp^* = a^2$ なので $p^* = a^2/p$ となる。この一つの事実によって、問題に現れるすべての共役が普通の分数に変わり、恒等式（identity）はすぐに導かれる。垂直（perpendicular）であるかどうかは、二つの弦（chord）のベクトルの比が純虚数（purely imaginary）であるかどうかで判定できる。そして恒等式により、この判定は簡単な積の条件に書き換えられる。多角形の問題では、この積の条件が漸化式（recurrence）になる。B_1 を選べば他の B_k はすべて決まってしまい、問題は、一周して B_1 に戻ってきたときにその連鎖が閉じるかどうかだけである。

解答

恒等式

P は円の上にあるので $|p| = a$ であり、$pp^* = a^2$、すなわち $p^* = a^2/p$ である。同様に $q^* = a^2/q$ である。したがって

$$p^* - q^* = \frac{a^2}{p} - \frac{a^2}{q} = \frac{a^2(q-p)}{pq} = -\frac{a^2(p-q)}{pq}.$$

$p \neq q$ であるから（また $a > 0$ より $p, q \neq 0$ であるから）これは o でなく、式を変形して

$$pq = -a^2 \frac{p-q}{p^* - q^*},$$

を得る。これが示すべきことであった。

垂直な弦

弦 PQ の向きは複素数 $p-q$ の向きであり、RS の向きは $r-s$ の向きである。0 でない二つの複素数が垂直であるのは、その比

$$w = \frac{p-q}{r-s}$$

が純虚数であるとき、かつそのときに限る。比の偏角（argument）が二つのなす角だからである。

> **考えてみよう** 「w は純虚数である」ということを、使える方程式にするにはどうすればよいか。

0 でない w が純虚数であるための必要十分条件は $w^* = -w$、すなわち $w/w^* = -1$ である。二つの弦それぞれに恒等式を用いると（二つ目では p, q の代わりに r, s とする）、

$$\frac{w}{w^*} = \frac{p-q}{p^*-q^*} \cdot \frac{r^*-s^*}{r-s} = \frac{-pq/a^2}{-rs/a^2} = \frac{pq}{rs}.$$

よって $PQ \perp RS$ であるための必要十分条件は $pq/rs = -1$ である。$rs \neq 0$ であるから、これは

$$pq + rs = 0.$$

を意味する。ここでの各段階はすべて逆にたどれるので、問われた以上のことが示されたことになる。すなわち、この円の弦について $PQ \perp RS \iff pq + rs = 0$ である。以下ではこの逆（converse）の向きが必要になる。

多角形の問題

点 A_k と B_k を表す複素数をそれぞれ α_k と β_k とする。前の小問（およびその逆）により、n 個の垂直条件はちょうど

$$\beta_k\beta_{k+1} = -\alpha_k\alpha_{k+1} \quad (k = 1, \ldots, n-1), \qquad \beta_n\beta_1 = -\alpha_n\alpha_1,$$

と同値である。ただし、各 B_kB_{k+1} が実際に弦となるように、隣り合う B どうしは異なるものとする。

β_1 を選ぶ。すると $\beta_{k+1} = -\alpha_k\alpha_{k+1}/\beta_k$ であるから、最初の $n-1$ 個の条件によって $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ が順に決まり、各 β_{k+1} の絶対値（modulus）は自動的に a となる。最初のいくつかを計算すると

$$\beta_2 = -\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1}, \qquad \beta_3 = -\frac{\alpha_2\alpha_3}{\beta_2} = \frac{\alpha_3\beta_1}{\alpha_1}, \qquad \beta_4 = -\frac{\alpha_3\alpha_4}{\beta_3} = -\frac{\alpha_1\alpha_4}{\beta_1},$$

となり、簡単な帰納法（induction）により

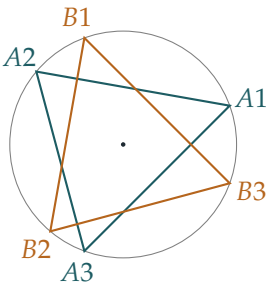
$$\beta_k = \frac{\alpha_k\beta_1}{\alpha_1} \ (k \text{ が奇数}), \qquad \beta_k = -\frac{\alpha_1\alpha_k}{\beta_1} \ (k \text{ が偶数}).$$

が得られる。（k で成り立てば、$\beta_{k+1} = -\alpha_k\alpha_{k+1}/\beta_k$ により $k+1$ ではもう一方の形が得られる。）あとはすべて、最後の条件 $\beta_n\beta_1 = -\alpha_n\alpha_1$ が成り立つかどうかにかかっている。

$n = 3$ の場合。このとき $\beta_3 = \alpha_3\beta_1/\alpha_1$ であるから、閉じる条件は

$$\frac{\alpha_3\beta_1^2}{\alpha_1} = -\alpha_3\alpha_1 \iff \beta_1^2 = -\alpha_1^2 \iff \beta_1 = \pm \mathrm{i}\,\alpha_1.$$

となる。よって B_1 の選び方は二通りしかない。$\beta_1 = \mathrm{i}\alpha_1$ とすると、公式から $\beta_2 = \mathrm{i}\alpha_2$、$\beta_3 = \mathrm{i}\alpha_3$ となる。$\beta_1 = -\mathrm{i}\alpha_1$ とすると、すべての k で $\beta_k = -\mathrm{i}\alpha_k$ となる。いずれの場合も、三角形 $B_1B_2B_3$ は三角形 $A_1A_2A_3$ を中心のまわりに直角だけ回転したものである。その頂点は互いに異なるので、どちらの選び方も実際に条件を満たす。実際、弦を 90° 回転すれば、もとの弦と垂直になるのは明らかである。



図は $\beta_1 = \mathrm{i}\alpha_1$ と選んだ場合を示している。琥珀色の三角形の各辺は、対応する青緑色の辺を 90° 回転したものである。

$n = 4$ の場合。このとき $\beta_4 = -\alpha_1\alpha_4/\beta_1$ であるから、

$$\beta_4\beta_1 = -\alpha_1\alpha_4$$

は β_1 が何であっても自動的に成り立つ。よって B_1 は円上の**どこに**選んでもよく、選び方は無限にある。例外は、隣り合う二つの B が一致してしまう有限個の位置だけである。たとえば $\beta_1 = \beta_2$ となるには $\beta_1^2 = -\alpha_1\alpha_2$ が必要であり、これで除外されるのは 2 点である。四つの一致のそれぞれが除外する点は高々 2 個なので、除外される位置は高々 8 個である。

$n > 4$ の場合。同じ計算はすべての n で成り立ち、効いてくるのは n の偶奇（parity）だけである。

- n が奇数ならば、閉じる条件は $\beta_1^2 = -\alpha_1^2$ である。選び方はちょうど二通り、$\beta_1 = \pm\mathrm{i}\alpha_1$ であり、$B_1B_2\cdots B_n$ は多角形 $A_1A_2\cdots A_n$ を中心のまわりに $\pm 90°$ 回転したものである。

- n が偶数ならば、閉じる条件は自動的に成り立つ。B_1 は、隣り合う B が一致してしまう高々 $2n$ 個の位置を除けば円上のどの点でもよく、選び方は無限にある。

検算

- $p = a$、$q = \mathrm{i}a$ としてみる。このとき $pq = \mathrm{i}a^2$ であり、$-a^2(a - \mathrm{i}a)/(a + \mathrm{i}a) = -a^2 \cdot (-\mathrm{i}) = \mathrm{i}a^2$ となって、確かに一致する。
- 互いに垂直な直径（diameter）$p = a$、$q = -a$ と $r = \mathrm{i}a$、$s = -\mathrm{i}a$ をとってみる。$pq + rs = -a^2 + a^2 = 0$ となる。
- 数値的には、恒等式と判定条件 $PQ \perp RS \iff pq + rs = 0$ を 1000 通りのランダムな配置で確かめた。$n = 3, \ldots, 9$ について、ランダムな出発点から漸化式を計算した。n が奇数のときは、B_1 を円周上で 0.1° 刻みに動かしたところ、連鎖が閉じたのは $\beta_1 = \pm\mathrm{i}\alpha_1$ の近くだけであった。n が偶数のときは毎回閉じ、すべての弦が丸め誤差の範囲で垂直であった。

よくある間違い

- 「垂直 $\Rightarrow pq + rs = 0$」だけを証明してしまう。多角形の問題では、構成した β たちが本当に垂直な弦を与えることを知るために、逆も必要である。
- 「垂直とは w が純虚数であること」を、$w \neq 0$ に触れずに $w + w^* = 0$ と書いてしまう。ここでは点が互いに異なるので $w \neq 0$ が保証されている。
- n が偶数のとき、いくつかの位置では隣り合う二つの B が一致して「弦」の向きが定まらなくなることに気づかずに、「どの B_1 でもよい」と言ってしまう。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto a^2/z^*$ は円 $|z| = a$ に関する**反転**であり、円上の点がこの写像で動かない（$p = a^2/p^*$）という事実こそが、この問題全体を動かしていた。反転はメビウス変換（Möbius transformations）の一つであり、メビウス変換は複素解析（complex analysis）と幾何学の最初の講義で中心的な役割を果たす。多角形の議論には**モノドロミー**（monodromy）の趣がある。ループに沿って、強制される選択の連鎖をたどり、出発点に戻ってくるかどうかを問う。そしてその答えは n の偶奇によって決まる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）は、反転やこうした幾何学的な考え方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。