解答例

STEP III 2007、第 5 問

純粋数学 • 高階導関数と数学的帰納法

STEP III 2007、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/07-s3-q5

鍵となる考え方

r と $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$ を θ だけで表してしまえば、すべてが簡単になる。$\coth\theta = x$ から $r = 1/\sinh\theta$ が得られ、さらに $\mathrm{d}r/\mathrm{d}x = \cosh\theta$、$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$ となる。すると $\cosh n\theta / r^n$ を微分したものは、ちょうど $\cosh(n+1)\theta$ の加法定理（compound-angle formula）の形になり、これによって帰納法（induction）が使えるようになる。

解答

準備

$x > 1$ であるから、$\coth\theta = x$ は $\theta > 0$ の範囲にただ一つの解をもち、したがって $\sinh\theta > 0$ である。$\coth^2\theta - 1 = \operatorname{cosech}^2\theta$ を用いると、

$$r^2 = x^2 - 1 = \coth^2\theta - 1 = \frac{1}{\sinh^2\theta}, \qquad \text{よって} \qquad r = \frac{1}{\sinh\theta},$$

となる。ここで r と $\sinh\theta$ はともに正であるから、正の平方根をとった。

二つの導関数がすべての仕事をしてくれる。$\coth\theta = x$ を x で微分すると、

$$-\operatorname{cosech}^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = -\sinh^2\theta = -\frac{1}{r^2}.$$

$r^2 = x^2 - 1$ を微分すると $2r\,\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = 2x$ となるから、

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{r} = \coth\theta\,\sinh\theta = \cosh\theta.$$

第1次・第2次導関数

$y = \ln r^2 = 2\ln r$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{2\cosh\theta}{r},$$

となり、求める式が得られた。第2次導関数については、$1/r = \sinh\theta$ と書くのがもっとも見通しがよく、このとき $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\cosh\theta\sinh\theta = \sinh 2\theta$ である。合成関数の微分法（chain rule）により、

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2\cosh 2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\cosh 2\theta}{r^2},$$

となり、求める式が得られた。

第3次導関数

今度は $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -2\cosh 2\theta\sinh^2\theta$ と書き、$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$ とともに積の微分法（product rule）を用いる：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} &= -2(2\sinh 2\theta\sinh^2\theta + 2\cosh 2\theta\sinh\theta\cosh\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\\ &= 4\sinh^3\theta(\cosh 2\theta\cosh\theta + \sinh 2\theta\sinh\theta)\\ &= 4\sinh^3\theta\cosh 3\theta,\end{aligned}$$

ここで恒等式 $\cosh(A+B) = \cosh A\cosh B + \sinh A\sinh B$ を用いた。したがって

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{4\cosh 3\theta}{r^3}.$$

一般の公式

$2\cosh\theta/r$、$-2\cosh 2\theta/r^2$、$4\cosh 3\theta/r^3$ という並びから、係数は $2\cdot 0!$、$-2\cdot 1!$、$2\cdot 2!$ であると見てとれる。そこで次のように予想する。

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}\frac{2\,(n-1)!\,\cosh n\theta}{r^n} \qquad (n \geq 1).$$

考えてみよう いま第3次導関数に対して行った計算を一般化すると、どのような計算になるだろうか。

それは $\cosh n\theta/r^n = \cosh n\theta\,\sinh^n\theta$ の微分である。積の微分法と合成関数の微分法に

より、$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$ を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh n\theta\,\sinh^n\theta) &= (n\sinh n\theta\,\sinh^n\theta + n\cosh n\theta\,\sinh^{n-1}\theta\cosh\theta)(-\sinh^2\theta)\\ &= -n\sinh^{n+1}\theta\,(\cosh n\theta\cosh\theta + \sinh n\theta\sinh\theta)\\ &= -n\sinh^{n+1}\theta\,\cosh(n+1)\theta,\end{aligned}$$

すなわち、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cosh n\theta}{r^n}\right) = -\frac{n\cosh(n+1)\theta}{r^{n+1}}.$$

いよいよ帰納法である。$n=1$ のとき公式は成り立つ（上で求めた第 1 次導関数そのものである）。ある $n=k\geq 1$ で成り立つと仮定する。すると、上の計算を $n=k$ として用いて、

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}y}{\mathrm{d}x^{k+1}} = (-1)^{k-1}\,2\,(k-1)!\cdot\left(-\frac{k\cosh(k+1)\theta}{r^{k+1}}\right) = (-1)^k\,\frac{2\,k!\,\cosh(k+1)\theta}{r^{k+1}},$$

となり、これは $n=k+1$ の場合の公式である。数学的帰納法により、

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}\,\frac{2\,(n-1)!\,\cosh n\theta}{r^n} \quad \text{すべての} n\geq 1.}$$

（$n=2$ と $n=3$ の場合は、直接求めた結果と一致する。）

別の道筋

部分分数分解（partial fractions）を使うと、独立した導出が得られる。$y=\ln(x-1)+\ln(x+1)$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,[(x-1)^{-n}+(x+1)^{-n}].$$

ところが $x\pm 1 = \dfrac{\cosh\theta\pm\sinh\theta}{\sinh\theta} = r\,\mathrm{e}^{\pm\theta}$ であるから、括弧の中は $r^{-n}(\mathrm{e}^{-n\theta}+\mathrm{e}^{n\theta}) = 2\cosh n\theta/r^n$ となり、同じ公式が得られる。これは置換がどこから来たのかも説明している。θ は $\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ の半分なのである。

検算

- $x=2$ のとき：部分分数分解からは $\mathrm{d}^3y/\mathrm{d}x^3 = 2\left(1+\frac{1}{27}\right) = \frac{56}{27}\approx 2.0741$ が得られ、$\theta=\tanh^{-1}\frac{1}{2}$、$r=\sqrt{3}$ として $4\cosh 3\theta/r^3$ を計算しても同じ値になる。
- 最初の三つの導関数を、$x>1$ の範囲の無作為な 200 点において $\ln(x^2-1)$ の差分（finite differences）と照合し、また一般の公式を $n\leq 14$ について部分分数分解の形と照合した（約 10^{-14} の精度で一致）。

- 符号：$\ln(x^2-1)$ は $x>1$ で増加かつ上に凸（concave）であり、$y'>0$、$y''<0$ と合致する。

よくある間違い

- $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = +\sinh^2\theta$ と書いてしまう：$\coth\theta$ の導関数は $-\operatorname{cosech}^2\theta$ であり、このマイナス符号こそが導関数の符号を交互に変える原因である。
- 階乗（factorial）を一つずらしてしまう：第 n 次導関数には $(n-1)!$ がつく。第 1 次導関数の係数が $2 = 2\cdot 0!$ だからである。
- いくつかの場合を確かめただけで終えてしまう：「証明せよ」とある以上、一般の帰納法のステップが必要である。

STEP のその先へ

すべての導関数がこのように簡潔な閉じた形で表せることは、複素解析（complex analysis）を垣間見せてくれる。$\ln(x^2-1)$ は $x=\pm 1$ に特異点（singularities）をもち、その高次導関数はそれらまでの距離、ここでは $x\mp 1 = re^{\mp\theta}$ によって支配されている。大学 1 年の解析学（analysis）の講義では、このような公式こそが、テイラー級数（Taylor series）の剰余項（remainder）を評価し、その収束半径（radius of convergence）を求めるのに必要となる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、なぜ特異点が冪級数（power series）を支配するのかを見事に説明している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。