解答例

STEP III 2007、第 4 問

純粋数学 • 媒介変数表示された曲線と曲率

> **STEP III 2007、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q4

鍵となる考え方

すべては $\dot{x}$ のすっきりした式にかかっている。厄介な項 $\ln\tan\frac{1}{2}t$ を微分すると $1/\sin t$ となり、その結果 $\dot{x}$ は $a\cos^2 t/\sin t$ にまで簡単になる。$\dot{x}$ と $\dot{y}$ が得られれば、傾き（gradient）、接線（tangent）、曲率（curvature）、法線（normal）はすべて素直な座標幾何によって求まる。単位接ベクトル（unit tangent）を $(\cos t, \sin t)$ と書いておくと、最後の小問は非常に短くて済む。

解答

傾き

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\tan\frac{1}{2}t = \dfrac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t}{\tan\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{2\sin\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{\sin t}$ であるから、

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) = a\,\frac{1-\sin^2 t}{\sin t} = \frac{a\cos^2 t}{\sin t},\\ \dot{y} &= a\cos t.\end{aligned}$$

を得る。$0 < t < \frac{1}{2}\pi$ ではどちらも正であるから、

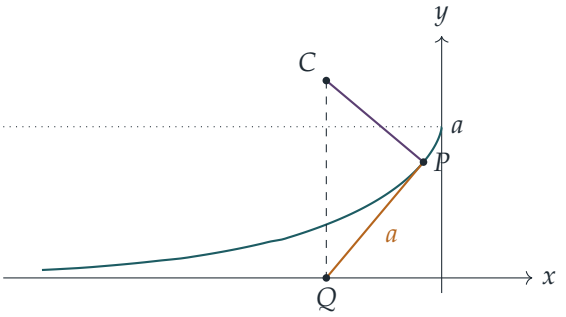
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a\cos t\cdot\frac{\sin t}{a\cos^2 t} = \tan t,$$

となり、題意が示された。

概形

- $t \to 0^+$ のとき $\tan\frac{1}{2}t \to 0^+$ であるから、$x \to -\infty$ となり、一方 $y \to 0$ である。x 軸は漸近線（asymptote）である。
- $t \to \frac{1}{2}\pi^-$ のとき $x \to a(0+\ln 1) = 0$、$y \to a$ である。曲線は $(0,a)$ で終わり、そこでは傾き $\tan t \to \infty$ となるので、その点での接線は鉛直である。
- $\dot{x} > 0$ であるから x は t とともに増加し、傾き $\tan t$ も増加する。したがって曲線は y が 0 と a の間にあって、着実に上昇し、下に凸（concave upwards）である。

この曲線は**トラクトリックス**（tractrix）である。図には後の小問で現れる点 P、Q、C も示してある。



接線：$PQ = a$

$P = (x,y)$ における接線の傾きは $\tan t$ である。この接線は P から水平方向に $y/\tan t$ だけ戻ったところで $y = 0$ と交わるので、

$$x_Q = x - \frac{y}{\tan t} = x - \frac{a\sin t\cos t}{\sin t} = x - a\cos t.$$

である。よって $\overrightarrow{QP} = (a\cos t,\ a\sin t)$ であり、

$$PQ = \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = a.$$

となる。したがって、曲線から x 軸までの接線の長さはつねに a である。（後で使うために記しておくと、$x_Q = a\ln\tan\frac{1}{2}t$ である。）

曲率半径

微分しやすいように $\dot{x} = a\left(\dfrac{1}{\sin t} - \sin t\right)$ と書くと、

$$\ddot{x} = a\left(-\frac{\cos t}{\sin^2 t} - \cos t\right), \qquad \ddot{y} = -a\sin t.$$

となる。すると

$$\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}=\frac{a\cos^2 t}{\sin t}(-a\sin t)+a\cos t\cdot a\Big(\frac{\cos t}{\sin^2 t}+\cos t\Big)$$
$$=a^2\Big(-\cos^2 t+\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}+\cos^2 t\Big)=a^2\cot^2 t,$$

であり、また

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=a^2\cos^2 t\Big(\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}+1\Big)=\frac{a^2\cos^2 t}{\sin^2 t}=a^2\cot^2 t.$$

である。考えている範囲では $\cot t>0$ であるから $(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}=a^3\cot^3 t$ であり、したがって曲率半径（radius of curvature）は

$$\rho=\frac{a^3\cot^3 t}{a^2\cot^2 t}=a\cot t,$$

となり、題意が示された。

曲率中心：CQ は鉛直

P における接線は単位ベクトル $(\cos t,\sin t)$ の向きであるから、法線は $(-\sin t,\cos t)$ またはその逆向きである。

> **考えてみよう** 2 つの法線方向のうち、「曲線の上側」を向いているのはどちらか？

$\cos t>0$ であるから、ベクトル $(-\sin t,\cos t)$ の y 成分は正である。曲線は下に凸であるから、P からこの向きに少し進むと曲線の上側に出る（いずれにせよ、もう一方の向きは下へ向かう）。よって曲率中心（centre of curvature）C は

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}+\rho(-\sin t,\cos t)=\big(x-a\cot t\sin t,\ a\sin t+a\cot t\cos t\big).$$

で与えられる。その x 座標は、接線の小問の結果より

$$x_C=x-a\cos t=x_Q$$

である。したがって C と Q は同じ x 座標をもち、CQ は y 軸に平行であり、題意が示された。（y 座標は $a\sin t+\dfrac{a\cos^2 t}{\sin t}=\dfrac{a}{\sin t}$ と簡単になるので、$C=\big(a\ln\tan\frac{1}{2}t,\ a\operatorname{cosec} t\big)$ である。）

検算

- $a=1$、$t=\frac{5\pi}{18}$（50°）のとき、$P\approx(-0.1202,\,0.7660)$、$Q\approx(-0.7630,\,0)$ であり、$PQ=1.0000$ となる。公式からは $C\approx(-0.7630,\,1.3054)$ が得られ、これは Q の真上にある。

- a と t の 2000 組の無作為な値について、$\dot{x}$、$\ddot{x}$ を有限差分（finite differences）で求めて数値的に確かめたところ、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \tan t$、$PQ = a$、$\rho = a\cot t$、$x_C = x_Q$ が丸め誤差の範囲で一致した。
- $t \to \frac{1}{2}\pi$ のとき $\rho \to 0$ である。すなわち曲線は $(0, a)$ に近づくにつれてますます急に曲がる（y 軸に関する鏡像とはそこで尖点（cusp）をなして出会う）。$t \to 0$ のとき $\rho \to \infty$ であり、これは曲線が漸近線に沿って平らになっていくことと整合する。

よくある間違い

- $\ln\tan\frac{1}{2}t$ を微分するとき、合成関数の微分（chain rule）から出る因子 $\frac{1}{2}$ を忘れること。答えは $1/\sin t$ にならなければならない。
- $\dot{x}$ を $a(-\sin t + \operatorname{cosec} t)$ のまま簡単にしないでおくこと。$a\cos^2 t/\sin t$ という形こそが、後の小問をすべてすっきりさせるのである。
- 法線方向として $(\sin t, -\cos t)$ を用いること。これは曲線の下側を向いており、C を誤った位置に置いてしまう。

STEP のその先へ

トラクトリックスは、x 軸に沿って歩く人が長さ a の紐で重りを引きずるときに重りが描く経路であり、$PQ = a$ はまさにその性質である。点 C は曲線の**縮閉線**（evolute）、すなわち曲率中心の軌跡（locus）を描く。ここで $C = (a\ln\tan\frac{1}{2}t,\ a\operatorname{cosec} t)$ は懸垂線（catenary）上にあることがわかる。トラクトリックスをその漸近線のまわりに回転させると擬球（pseudosphere）が得られる。これは負の定曲率をもつ曲面であり、双曲幾何（hyperbolic geometry）のモデルとなる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）には、擬球についての美しい幾何学的な解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。