解答例

STEP III 2007、第 3 問

純粋数学 ・ フィボナッチ数の恒等式

> **STEP III 2007、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q3

鍵となる考え方

ここに現れる恒等式はすべて同じ方法で証明できる。添字（index）が最大の項を取り、漸化式（recurrence）$F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$ を用いて分解するのである。これを 1 回行うと、(ii) の式はすべての添字が 1 ずつ下がった式に変わる。2 回行うと、添字が 2 ずつ下がった同じ形の式に戻る。これこそが数学的帰納法（induction）に必要なことである。(iv) の整除性（divisibility）については、$F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+1}$ であることに注目すれば、F_{2n-1}^2 と F_{2n}^2 は F_{2n+1} で割ったときの余り（remainder）が等しいことがわかる。

解答

小問 (i)

$F_1 = F_2 = 1$ から始めて、連続する項を足していくと

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21.$$

小問 (ii)

すべての項が定義されるように $k \geq 1$ とする。添字が最大の項 F_{2k+3} を $F_{2k+2} + F_{2k+1}$ で置き換えると

$$\begin{aligned} F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 &= (F_{2k+2} + F_{2k+1})F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 \\ &= F_{2k+1}^2 + F_{2k+2}(F_{2k+1} - F_{2k+2}) \\ &= F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}, \end{aligned}$$

となる。ここで、漸化式より $F_{2k+2} - F_{2k+1} = F_{2k}$ であることを用いた。これは $-F_{2k+2}F_{2k} + F_{2k+1}^2$ であり、示すべき式である。

小問 (iii)

命題 $F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2 = 1$ を $P(n)$ と書く。

基底段階（*base case*）。$n = 1$ のとき、$F_3F_1 - F_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$ であるから、$P(1)$ は成り立つ。

帰納段階（*inductive step*）。ある $k \geq 1$ について $P(k)$ が成り立つと仮定する。小問 (ii) より

$$F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 = F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}.$$

> **考えてみよう** 小問 (ii) では添字が 1 つ下がっただけである。どうすれば $P(k)$ まで戻れるだろうか？

同じ技法をもう一度用いる。今度は添字が最大の項を $F_{2k+2} = F_{2k+1} + F_{2k}$ と分解すると

$$\begin{aligned} F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k} &= F_{2k+1}^2 - (F_{2k+1} + F_{2k})F_{2k} \\ &= F_{2k+1}(F_{2k+1} - F_{2k}) - F_{2k}^2 \\ &= F_{2k+1}F_{2k-1} - F_{2k}^2, \end{aligned}$$

となる。ここで $F_{2k+1} - F_{2k} = F_{2k-1}$ を用いた（$2k + 1 \geq 3$ であるから成り立つ）。仮定 $P(k)$ より、これは 1 に等しい。上の 2 つの式をつなげると

$$F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 = 1,$$

となり、これは $P(k+1)$ である。数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ について $P(n)$ が成り立つ。

結論の導出。 $P(n)$ を変形すると

$$F_{2n}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-1},$$

であり、F_{2n-1} は整数である（漸化式より、すべての F_m は整数である）。よって、$F_{2n}^2 + 1$ は F_{2n+1} で割り切れる。

小問 (iv)

漸化式より $F_{2n-1} = F_{2n+1} - F_{2n}$ である。両辺を 2 乗すると

$$F_{2n-1}^2 = F_{2n+1}^2 - 2F_{2n+1}F_{2n} + F_{2n}^2,$$

であるから

$$F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}(F_{2n+1} - 2F_{2n}) + (F_{2n}^2 + 1).$$

第 1 項は F_{2n+1} の倍数であり（掛けられている因子は整数である）、$F_{2n}^2 + 1$ は小問 (iii) より F_{2n+1} の倍数である。したがって、$F_{2n-1}^2 + 1$ は F_{2n+1} で割り切れる。

実は商（quotient）を求めることもできる。$F_{2n}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-1}$ を用いると

$$F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}(F_{2n+1} - 2F_{2n} + F_{2n-1}) = F_{2n+1}(2F_{2n-1} - F_{2n}),$$

であり、$n \geq 2$ のとき括弧の中は $F_{2n-1} - F_{2n-2} = F_{2n-3}$ となる。よって $F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-3}$ であり、これは (iii) の恒等式（identity）の近い親戚である。

検算

$n = 3$ のとき、$F_6^2 + 1 = 65 = 13 \times 5 = F_7F_5$、$F_5^2 + 1 = 26 = 13 \times 2 = F_7F_3$ である。$n = 4$ のとき、$F_7^2 + 1 = 170 = 34 \times 5 = F_9F_5$ である。(ii) と (iii) の恒等式、2 つの整除性の主張、および商が F_{2n-3} となることは、37 以下のすべての n についてコンピュータで確認した。

よくある間違い

- (ii) だけで帰納法を行おうとすること。(ii) では添字が 1 つしか下がらず、得られる式 $F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}$ はまだ仮定の形になっていない。漸化式をもう一度用いる必要がある。
- 基底段階を忘れること、あるいは誤った添字で確かめること（$n = 1$ の場合に関わるのは F_1、F_2、F_3 である）。

STEP のその先へ

小問 (iii) は、カッシーニ（Cassini）の恒等式 $F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$ の半分にあたる。この恒等式は行列式（determinant）からただちに導かれる。行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m$ の成分は F_{m+1}、F_m、F_m、F_{m-1} であり、その行列式は $(-1)^m$ である。(iv) のような整除性に関する事実は、線形漸化式（linear recurrence）の整数論の出発点であり、そこでは合同式（congruence）が主役を演じる。整数論については Davenport の *The Higher Arithmetic*（初等整数論の入門書）が、行列の観点については Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数の入門書）が、次の一歩としてよいであろう。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。